

半径方向に変化する媒質中の孔井内を伝わる 境界波・表面波

斎藤正徳

Propagation of boundary and surface waves along
the axis of a borehole in a radially heterogeneous medium

Masanori SAITO

Abstract

A systematic method to investigate dispersion characteristics of guided waves in an empty and a fluid-filled borehole in a radially heterogeneous elastic medium was developed. In the plane geometry the wave field is known to be decomposed into the SH wave field and the P-SV wave field, the corresponding normal modes being the Love wave and the Rayleigh wave. In the cylindrical coordinate system, however, the wave field can not be decomposed into the SH and P-SV analogues, except for the axi-symmetric cases, and the equations of motion become of the full sixth order in the spatial coordinates. After separation of variables, the equations of motion were reduced to a set of sixth order ordinary differential equations, which can be integrated with high accuracy using the compound matrix method. Using compound matrix elements, one can calculate the phase and group velocity dispersion curves, the transfer function of the medium, and the excitation functions of given external forces. Dispersion curves for axi-symmetric modes and nonsymmetric modes in an empty and fluid-filled borehole in simple two-layered formations were computed, and synthetic waveforms generated by a suspension log source, by an explosive (monopole) source and by a dipole source are presented.

Keywords: well logging, tube wave, Stoneley wave, boundary wave, surface wave

(要 旨)

トンネルや孔井のように、固体中に明けられた円筒状の孔を軸方向に伝わる定常波は、空孔の場合には表面波、液体がはいっている場合には境界波である。このような波は検層の解析に関連して古くから議論されてきたが、その多くは孔井の軸の周りに回転対称な波についてであった。近年、サスペンション検層のように、軸対称でない波も用いられている。この論文では軸の周りに任意の対称性をもつ波で、しかも媒質の密度や弾性定数が軸からの距離によって変化する場合の問題を解く一般的な方法を定式化する。軸対称の場合には運動方程式が振れ型の成分と縦波型の成分に分離することができるが、任意の対称性をもつ場合にはこのような分離ができず、変位の3成分を同時に解かなければならない。このような場合でも、精度を落とすことなく分散曲線を計算することができる、新しい方法を開発した。この方法を用いて孔井を伝わる波の分散曲線、および合成波形を計算することができる。現在、地表では表面波探査法が広く用いられているが、初動よりもはるかに振幅の大きい境界波を用いれば、孔井中でも孔井の周囲の構造を探査できる可能性がある。

キーワード: 検層, チューブ波, ストンレー波, 境界波, 表面波

1. はじめに

トンネルや孔井のように、固体中にあけられた円筒状の孔を軸方向に伝わる定常波は、空孔の場合には表面波、液体がつまっている場合には境界波である。以下では記述を簡単にするために、空孔の孔壁を伝わる波を「トンネル波」、液体のつまった孔井を伝わる波を「孔井波」と呼ぶことにする。

これらの波は検層に関連して古くから議論の対象とされてきた。基本的な議論は 1950 年代に行われており、この時代の成果は Ewing et al.(1957)¹⁾ の第 6 章にまとめられている。しかしこれ以来現在にいたるまで、波動場としては孔井の軸の周りに回転対称なものばかりを対象としてきた。現在ではサスペンション検層のように回転対称でない波も用いられている (Kitsunozaki, 1980)²⁾。

そこで本論文では、軸の周りの任意の対称性をもつ波を対象とする。すなわち、以下では円筒の中心軸を z 軸とした円筒座標 (r, φ, z) を用い (図-1)、 z 方向に波数 k で伝播する波を考える。したがって解は

$$e^{i(kz+m\varphi-\omega t)} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

に比例する形に表すことができる。ここに ω は角周波数、 k は z 方向の波数、 m は方位方向の波数である。波動場は φ の一価関数、すなわち φ が 2π 変化したときにもとの値にもどらなければならないから、 m は整数でなければならない。以下では $\omega > 0$ を仮定する。 $\omega < 0$ の解は $\omega > 0$ の解から容易に導かれるからである。実際の解は指数関数の前に成分によって異なる r の関数が掛かることになり、これを求めるのがこれからの問題である。

上式で $m = 0$ がこれまでよく議論されてきた軸対称解である。 $m \neq 0$ の解を以下では簡単に非軸対称解と呼ぶことにする。爆発的な振源は $m = 0$ のモードしか発生しないが、孔壁の一点に力を加えたような場合には非軸対称モードも励起されるので、非軸対称の波の伝播特性を知っておくことは重要なことである。

これまでは媒質は一樣と考えて議論されてきた。現実の媒質は孔軸方向にも、孔軸からの距離によっても変化する。そこでここでは孔軸からの距離 r によって媒質の密度 ρ 、縦波速度 α 、横波速度 β が変化する場合の一般的な取り扱い方法を提案する。なお、以下では非弾性減衰がない場合のみを取り扱うが、減衰がある場合には、以下の定式化において縦波速度 α 、横波速度 β を、縦波の減衰パラメーター Q_α と横波の減衰パラメーター Q_β を用いて

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \alpha_r \left(1 + \frac{1}{\pi Q_\alpha} \log \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{i}{2Q_\alpha} \right) \\ \beta(\omega) &= \beta_r \left(1 + \frac{1}{\pi Q_\beta} \log \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{i}{2Q_\beta} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

で置きかえてやればよい。ここに ω_r は規準の角周波数

であり、 α_r, β_r は ω_r における規準の速度である。弾性波速度が周波数によって変化してしまうが、これは波動が因果律を満たすために必要になるのである (Aki and Richards, 1980, p.177)³⁾。

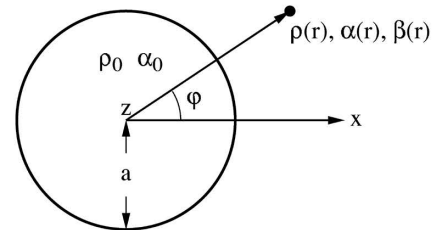


図-1 座標系。 a は孔井の半径。孔井は空のときもあるし、液体で満たされていることもある。

Fig. 1 The coordinate system. a is the radius of the borehole. The borehole may be empty or may be filled with a fluid.

以下、§2 では非軸対称問題に対する基本方程式を導き、§3, 4 ではその特別な場合としての軸対称解について、具体的な構造に対する分散曲線や振幅応答を計算する。§5 では非軸対称モードの計算公式を導き、方位方向の波数 m による分散曲線の違いについて議論する。またサスペンション検層をモデル化し、理論波形を計算する。最後に、§6 では一般的な多重極点振源についての公式を導き、単極子、双極子振源から発生する波形を計算する。

2. 基本方程式

本節では任意の m に対する弾性波動方程式を変数分離して常微分方程式導き、特別な場合として媒質が一樣なときの解を導く。

2.1 運動方程式

一樣な媒質中の弾性波動の解は変位ポテンシャルを用いて書き表すことができることはよく知られているが、媒質の性質が変化する場合にはこの方法は使えない。そこで一樣な場合の解を参考にして、媒質の密度 ρ 、ラメの弾性定数 λ 、剛性率 μ が r 方向に変化する場合の円筒座標系における変位の成分を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} u_r &= W_m(r) e^{i(kz+m\varphi-\omega t)} \\ u_z &= iU_m(r) e^{i(kz+m\varphi-\omega t)} \\ u_\varphi &= iV_m(r) e^{i(kz+m\varphi-\omega t)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$W_m(r), U_m(r), V_m(r)$ がこれから求めようとする関数である。第二、三式に虚数単位 i が掛けているのは、以下に導く運動方程式に i が含まれないようにするためである。 $W_m(r)$ などは ω や k の関数であるが、ここでは明示していない。これらを用いて応力を計算する。後で

必要になる成分だけを示すと

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= P_m(r)e^{i(kz+m\varphi-\omega t)} \\ \sigma_{zr} &= iS_m(r)e^{i(kz+m\varphi-\omega t)} \\ \sigma_{r\varphi} &= iT_m(r)e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}\end{aligned}\quad (2.2)$$

と書くことができる。ただし

$$\begin{aligned}P_m(r) &= (\lambda + 2\mu)\frac{dW_m}{dr} \\ &\quad + \frac{\lambda}{r}(W_m - mV_m) - k\lambda U_m \\ S_m(r) &= \mu\left(\frac{dU_m}{dr} + kW_m\right) \\ T_m(r) &= \mu\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{V_m}{r}\right) + \frac{m}{r}W_m\right]\end{aligned}\quad (2.3)$$

である。 σ_{rr} , σ_{zr} , $\sigma_{r\varphi}$ は r 軸に垂直な面内に働く応力であるから、媒質に不連続があっても $P_m(r)$, $S_m(r)$, $T_m(r)$ は連続でなければならない。たとえばトンネルの壁面ではこれらは 0 にならなければならない。

応力のほかの 3 成分 $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} , $\sigma_{\varphi z}$ も計算し、これらを弾性体の運動方程式に代入すると、次のような式が得られる。

$$\begin{aligned}-\rho\omega^2 W_m &= \frac{dP_m}{dr} - \frac{m}{r}T_m - kS_m \\ &\quad + \frac{2\mu}{r}\left[\frac{dW_m}{dr} - \frac{1}{r}(W_m - mV_m)\right] \\ -\rho\omega^2 U_m &= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rS_m) - \frac{m\mu}{r}\left(\frac{m}{r}U_m + kV_m\right) \\ &\quad + k\left[P_m - 2\mu\frac{dW_m}{dr} - 2k\mu U_m\right] \\ -\rho\omega^2 V_m &= \frac{dT_m}{dr} + \frac{2}{r}T_m \\ &\quad + \frac{m}{r}\left[P_m - 2\mu\frac{dW_m}{dr} + \frac{2\mu}{r}(W_m - mV_m)\right] \\ &\quad - k\mu\left(\frac{m}{r}U_m + kV_m\right)\end{aligned}\quad (2.4)$$

(2.3), (2.4) 式によって運動方程式は r だけに依存する方程式に帰着したことになる、変数分離 (2.1) 式が結果として正しかったことがわかる。

(2.3) 式を dW_m/dr , dU_m/dr , dV_m/dr について解き、またこれらを用いて上式の右辺に現れる dW_m/dr を消去すれば W_m , U_m , V_m , P_m , S_m , T_m に関する 6 元の連立一次常微分方程式が導かれる。これらの方程式には ρ , λ , μ の r 微分は含まれていない。微分方程式の具体的な形は後で示す。この微分方程式を、たとえば無限遠 $r \rightarrow \infty$ で 0、壁面で応力 P_m , S_m , T_m が 0 という条件で解くと、角周波数 ω と z 軸方向の波数 k の間の関係が得られる。これがトンネル波の分散曲線である。

この分散曲線は方位角方向の波数 m にも依存する。ただし、(2.3), (2.4) 式を見ればわかるように、 m を $-m$ で置きかえたときには V_m と T_m の符号を変えれば全く同じ方程式が成り立つから、 $+m$ と $-m$ は同じ固有値を与

える (縮退している)。いいかえれば、 $\cos m\varphi$ と $\sin m\varphi$ の変化に対して同じ分散曲線が得られる。そこで以下では $m > 0$ だけを考え、 m が負のときには

$$\begin{aligned}W_{-m} &= W_m & U_{-m} &= U_m \\ P_{-m} &= P_m & S_{-m} &= S_m \\ V_{-m} &= -V_m & T_{-m} &= -T_m\end{aligned}\quad (2.5)$$

と約束する。

軸対称 $m = 0$ のときには、運動方程式 (2.3) 式と (2.4) 式は (W_0, U_0, P_0, S_0) の組と (V_0, T_0) の組に分離できることが容易にわかる。前者は軸対称の縦波モード (longitudinal mode)、後者は純粋な捩れモード (torsional mode) に対応している。これらについては §3 で詳しく議論する。

2.2 均質媒質に対する解

媒質の密度、弾性定数が一定のときには、方程式 (2.3), (2.4) の解析解を変位ポテンシャルを用いた弾性波動方程式の解法によって導くことができる。これらの解は不均質媒質のときの無限遠 $r \rightarrow \infty$ における境界条件や、 $r = 0$ 近傍の解としても用いることができる。

解析解には P 波成分と S 波成分がある。P 波成分の解は

$$\begin{aligned}W_m &= \frac{dZ_m(\omega\xi r)}{dr} & U_m &= kZ_m(\omega\xi r) \\ V_m &= \frac{m}{r}Z_m(\omega\xi r) \\ P_m &= (2k^2\mu - \rho\omega^2)Z_m \\ &\quad - \frac{2\mu}{r}\left(\frac{dZ_m}{dr} - \frac{m^2}{r}Z_m\right) \\ S_m &= 2k\mu\frac{dZ_m}{dr} & T_m &= 2m\mu\frac{d}{dr}\left(\frac{Z_m}{r}\right) \\ \xi^2 &= \alpha^{-2} - p^2 & p &= \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}\end{aligned}\quad (2.6)$$

で与えられる。 $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ は縦波速度、 p は z 方向の位相速度 c の逆数で、波線パラメーターである。

$Z_m(x)$ は円筒関数を一般的に表したものであり、 x が実数のときにはベッセル関数 $J_m(x)$ やノイマン関数 $N_m(x)$ 、あるいはそれらの線型結合を用いればよい。 x が虚数のときには第一種変形ベッセル関数 $I_m(|x|)$ や第二種変形ベッセル関数 $K_m(|x|)$ を用いればよい。2 種類のうちのどちらかを選ぶかは境界条件によって決まる。

S 波成分の解は 2 組あり、そのうちの一つは

$$\begin{aligned}W_m &= -k\frac{dZ_m(\omega\eta r)}{dr} \\ U_m &= (\omega\eta)^2 Z_m(\omega\eta r) & V_m &= -\frac{mk}{r}Z_m(\omega\eta r) \\ P_m &= -2k\mu\frac{d^2 Z_m}{dr^2} \\ S_m &= (\rho\omega^2 - 2k^2\mu)\frac{dZ_m}{dr}\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$T_m = -2mk\mu \frac{d}{dr} \left(\frac{Z_m}{r} \right)$$

$$\eta^2 = \beta^{-2} - p^2$$

である。 $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ は横波速度である。S 波成分のもう一つの解は

$$W_m = -\frac{m}{r} Z_m(\omega\eta r) \quad U_m = 0$$

$$V_m = -\frac{dZ_m(\omega\eta r)}{dr}$$

$$P_m = -2m\mu \frac{d}{dr} \left(\frac{Z_m}{r} \right) \quad (2.8)$$

$$S_m = -\frac{mk\mu}{r} Z_m(\omega\eta r)$$

$$T_m = (\rho\omega^2 - k^2\mu)Z_m + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{dZ_m}{dr} - \frac{m^2}{r} Z_m \right)$$

である。媒質が液体のときには ($\mu = 0$)、P 波成分の解 (2.6) 式だけを考えればよい。

3. 軸対称モード

はじめに、これまでよく議論されてきた軸対称の問題を少し詳しくとりあげる。これは後の議論の基礎になるからである。

$m = 0$ のときには変位が φ によらないので軸対称モードと呼ぶことにする。先にも述べたように、このときの解は 2 組の独立な解に分解することができる。一つは (V_0, T_0) だけで表される解で、変位が対称軸の周りの回転成分だけの捩れ (torsional) モードである。もう一つは (W_0, U_0, P_0, S_0) で表される解で、半径方向には方位によらず一様に伸び縮みし、同時に軸方向にも伸び縮みする縦波 (longitudinal) モードである (図-2(a))。捩れモードは平面問題の場合の SH 波、縦波モードは P-SV 波に対応している。

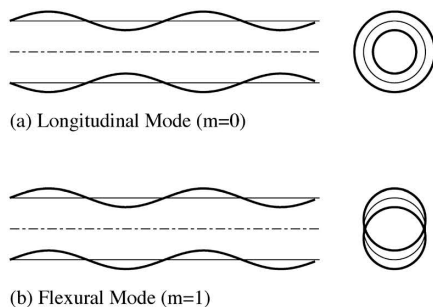


図-2 円筒の変形モード。(a) 縦波モード ($m = 0$)、(b) 撓みモード ($m = 1$, §5 参照)。

Fig. 2 (a) Longitudinal and (b) flexural modes of deformation of a borehole.

3.1 捩れモード

捩れモードは変位が φ 方向にしか生じないモードである。このモードではトンネルの壁面は円形を保ったまま

時計回り、反時計回りに回転する。変位は (1.1) 式から

$$u_\varphi = iV_0(r; \omega, k)e^{i(kz - \omega t)}$$

$$u_r = u_z = 0 \quad (3.1)$$

と表される。これは周波数-波数空間における表現である。実空間における変位は上式を波数 k と角周波数 ω について積分した

$$u_\varphi(r, z; t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} iV_0(r; \omega, k)e^{i(kz - \omega t)} dk \quad (3.2)$$

で与えられるが、当面は積分を無視して (3.1) 式の形で考える。

3.1.1 捩れモードの分散

$V_0(r), T_0(r)$ に対する運動方程式は (2.3) 式の第三式、(2.4) 式の第三式から

$$\frac{dV_0}{dr} = \frac{1}{r} V_0 + \frac{1}{\mu} T_0$$

$$\frac{dT_0}{dr} = (k^2\mu - \rho\omega^2)V_0 - \frac{2}{r} T_0 \quad (3.3)$$

になる。上式は $V_0(r), T_0(r)$ に関する連立一次常微分方程式になっている。ここでは密度 ρ や剛性率 μ は r の関数であってもよい。さらに、密度や剛性率に不連続があってもよい。不連続があっても変位 u_φ や応力 $\sigma_{r\varphi}$ は連続でなければならないから、上式は不連続点でも $V_0(r), T_0(r)$ が連続になるように積分しなければならない。

そのほかの境界条件としては、波動エネルギーが無限遠に逃げていってしまわないために

$$V_0(r), T_0(r) \longrightarrow 0 \quad r \longrightarrow \infty \quad (3.4)$$

でなければならない (放射条件)。そうでないと z 方向に定常的に伝わるができないからである。実は単に 0 になるだけでは不十分なのであるが、この点はすぐ後で議論する。

もう一つの条件は、トンネル波を例にとれば、トンネルの内壁で応力が 0 になることである。空孔の内半径を a とすると $r = a$ では応力 $\sigma_{r\varphi}$ が 0 でなければならないから、境界条件は

$$T_0(a; \omega, k) = 0 \quad (3.5)$$

である。 T_0 は ω と k にもよっているので、 ω を与えれば上式を満たす波数 k が求められる。これが固有値である。 ω を固定したとき、上式は一般に複数の固有値をもつ。これらの固有値を $k_n(\omega)$ とする。 n は位相速度 $c = \omega/k$ が最も小さいモードを基本モードと呼び $n = 0$ とし、位相速度が大きくなる順に $n = 1, 2, \dots$ と番号付けをする。運動方程式 (3.3) は波数 k に関して偶である

から、 k が (3.5) 式を満たす固有値なら、 $-k$ も固有値である。そこで $k_{-n}(\omega) = -k_n(\omega)$ と約束する。

媒質が一様なときには (3.3) 式の一般解は (2.8) 式から

$$V_0(r) = -\frac{dZ_0(\omega\eta r)}{dr}$$

$$T_0(r) = (\rho\omega^2 - k^2\mu)Z_0 + \frac{2\mu}{r} \frac{dZ_0}{dr}$$

で表される。 η が実数のときには円筒関数 Z_0 はベッセル関数 J_0 、ノイマン関数 N_0 、またはこれらの線型結合で表される。したがって媒質が一様で η が実数ときの (3.3) 式の一般解は、積分定数を A, B とすると

$$V_0(r) = AJ_1(\omega\eta r) + BN_1(\omega\eta r) \quad (3.6)$$

$$T_0(r) = -\mu\omega\eta [AJ_2(\omega\eta r) + BN_2(\omega\eta r)]$$

と表される。ここに現れる円筒関数は無限遠で 0 に収束する。たとえば $J_1(x)$ は

$$J_1(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) \quad x \longrightarrow \infty$$

であるから、これらはたしかに $r \rightarrow \infty$ で 0 になる。したがってあとは孔壁での境界条件 (3.5) 式が満たされるかどうかである。

境界条件を満たす η が存在することは簡単にわかる。まず (3.6) 式で $B = 0$ とすると $\eta = 0$ が境界条件 (3.5) を満たす根である。ただし (3.6) 式のまま η を 0 にすると $V_0(r)$ も $T_0(r)$ も 0 になってしまうから、 η で割ってから $\eta \rightarrow 0$ の極限を取らなければならない。このときの解は $T_0 \equiv 0$ で $V_0(r)$ は r に比例する。これは $z =$ 一定の面内で見ると z 軸を回転軸とする剛体回転である。 $\eta = 0$ は位相速度が $c = \beta$ を意味しているから、これは z 軸方向に伝わる単なる平面 S 波にほかならない。

η が 0 でない根も存在する。 $J_2(x)$ や $N_2(x)$ は $x \neq 0$ に無限個の零点をもっているから、 $J_2(x)$ や $N_2(x)$ の零点の一つを x とすれば

$$\omega\eta a = x$$

が (3.5) 式の根である。上式はある周波数以上では k が実数になる解をもっている。ただし、 $J_2(x)$ の零点を用いるときには $B = 0$ とし、 $N_2(x)$ の零点を用いるときには $A = 0$ とする。さらに任意の η に対しても A, B の比を適当に選べば境界条件を満足させることができる。

しかしこのようにして求められる解は、実はわれわれが目標とする解ではない。先に示した漸近展開を用いて u_φ のベッセル関数を用いた解を書き表すと、指数関数の部分は

$$u_\varphi \sim \left[e^{i\omega(pz + \eta r - t) - i\epsilon} + e^{i\omega(pz - \eta r - t) + i\epsilon} \right]$$

となる。 $\epsilon = 3\pi/4$ である。どちらの指数部も $r-z$ 面内の直線上で等位相になっている。これは波面が z 軸を

対称軸とする円錐面であることを意味している。このような波を円錐波 (conical wave) という。第一項は z 軸から発散する円錐波であり、第二項は z 軸に収束する円錐波である。これは半無限弾性体でいえば、無限遠から SH 平面波が入射して自由表面で反射する解に対応している。ベッセル関数ではなくノイマン関数を使っても同じである。

以上の考察から、解 (3.6) 式は無限遠に振源があることを想定しており、したがってこの解は放射条件を満たしているとはいえないことがわかった。真に放射条件を満足させるためには解が r に対して指数的に 0 にならなければならない。そのためには直角座標との対応から η が虚数にならなければならない。これは位相速度が S 波速度よりも小さくしなければならないことを意味している。そこで改めて $\eta = i\hat{\eta}$ と置くと、 $r \rightarrow \infty$ で 0 になる (3.3) 式の解は第二種の変形ベッセル関数 $K_m(x)$ を用いて

$$V_0(r) = K_1(\omega\hat{\eta}r)$$

$$T_0(r) = -\mu\omega\hat{\eta}K_2(\omega\hat{\eta}r) \quad (3.7)$$

$$\hat{\eta} = \sqrt{p^2 - \beta^{-2}} > 0$$

と表されることになる。積分定数は省略してある。変形ベッセル関数 $K_m(x)$ の漸近展開は

$$K_m(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad x \longrightarrow \infty$$

であるから、この解はたしかに無限遠で指数関数的に 0 に収束する。一方、 $K_m(z)$ はつねに正であるから、この解は孔壁における境界条件 $T_0(a) = 0$ を満足することはない。

以上をまとめれば、均質な媒質中の空孔内には、軸方向に定常的に伝わる振れ型の波は存在しない。これは均質な半無限弾性体に SH 型の表面波が存在しないことに対応している。しかし平面問題の場合でも表層が低速で下層が高速の場合、表面波が存在することはよく知られている。これはいうまでもなくラブ波である。同様にトンネルの場合にも孔壁近くが低速である場合には、ラブ波のような波が存在することは運動方程式を数値積分することによって示すことができる。

実際に構造が変化する場合の計算はつぎのように行う。対象とする波の波長より十分大きな半径 R を選べば、 $r > R$ では媒質は一様と考えてよいであろう。そこで $r = R$ で (3.7) 式によって V_0, T_0 の値を計算し、これを微分方程式 (3.3) の初期値として用いて $r = a$ まで積分する。構造を区分的に均質な層で近似したとすれば一般解 (3.6) 式を用いて平面問題のようにハスケル法を導くことができるが、層行列にベッセル関数が含まれるので計算が非常に面倒になる (Tubman et al., 1984)⁴⁾。したがってたとえばルンゲ・クッタ・シル法などの数値積分法を用いて積分を行った方が効率的である。ここで ω を固定して k を変化させて境界条件 (3.5) 式を満たす k が求められればこれが固有値である。位相速度は $c = \omega/k$

で計算される。媒質に減衰がない場合には、固有値は実数である。

群速度 U は (3.5) 式を満たす分散曲線に沿った微分

$$\frac{1}{U(\omega)} = \frac{dk(\omega)}{d\omega}$$

で定義される。陰関数の微分の公式を用いれば

$$\frac{1}{U(\omega)} = \frac{dk(\omega)}{d\omega} = -\frac{\partial T_0(a)/\partial\omega}{\partial T_0(a)/\partial k} \quad (3.8)$$

となるが、この式を用いるためには $\partial T_0/\partial\omega$, $\partial T_0/\partial k$ が必要になる。これらは (3.3) 式を ω や k で偏微分した微分方程式、たとえば ω に関する微分の場合には

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \frac{\partial V_0}{\partial\omega} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_0}{\partial\omega} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_0}{\partial\omega} \\ \frac{d}{dr} \frac{\partial T_0}{\partial\omega} &= -2\rho\omega V_0 \\ &+ (k^2\mu - \rho\omega^2) \frac{\partial V_0}{\partial\omega} - \frac{2}{r} \frac{\partial T_0}{\partial\omega} \end{aligned} \quad (3.9)$$

を $V_0(r)$, $T_0(r)$ と一緒に積分する。同様に k についての微分も積分して (3.8) によって群速度を計算すればよい。もちろん (3.8) 式は (3.5) 式を満たす k , すなわち固有値に対して計算しなければならない。

振れモードの分散曲線は平面問題の場合のラブ波の分散曲線に似ているが、大きな違いがある。ラブ波の基本モード ($n=0$) の位相速度は周波数 0 で最下層の速度に、高周波で表層の速度に収束し、遮断周波数が存在しない。しかしトンネル波の場合には基本モードにも遮断周波数があり、ここで位相速度が無限遠 ($r \rightarrow \infty$) の速度に収束し、ここから高周波に向かって位相速度は減少し、孔壁の S 波速度に収束する。基本モードにも遮断周波数が存在するのは円筒座標系における固有の現象である。§3.2 節では縦波モードと平面問題のレーリー波の分散曲線の比較を行う。

3.1.2 振れモードの励起

これまでは周波数-波数空間で考え、自由な境界条件を満たす、いわゆるノーマルモード解だけを問題にしてきた。ノーマルモード解の振幅を決めるためには実空間上で外力が加えられたときの問題を解かなければならない。

実空間における解は周波数-波数空間の解を二重フーリエ変換することによって得られる。まず波数積分を行うことにすれば、振れモードの場合、周波数領域における解、すなわちスペクトルは (3.2) 式から

$$u_\varphi(r, z; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} iAV_0(r; \omega, k) e^{ikz} dk \quad (3.10)$$

と書くことができる。 $V_0(r; \omega, k)$ は無限遠で放射条件を満たす運動方程式 (3.3) 式の積分、 A は積分定数である。

積分定数 A を決めるためには外力を与えなければならない。ここではトンネルの壁面 $r=a$ で応力 $\sigma_{r\varphi}$ が与え

られているとする。与えられた外力はやはりフーリエ積分で

$$\sigma_{r\varphi}(a, z; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ig_0(\omega, k) e^{ikz} dk$$

と表すことができる。 $ig_0(\omega, k)$ は壁面で与えられた応力 $\sigma_{r\varphi}(a, z; t)$ の周波数-波数スペクトルである。たとえば $\sigma_{r\varphi}$ が z に関してデルタ関数のときには g_0 は $-i$ になる。ただしデルタ関数とはいっても軸対称問題であるから、外力はトンネルの壁面全周にわたって働いていることに注意しなければならない。

解 (3.10) に対応する応力は

$$\sigma_{r\varphi}(r, z; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} iAT_0(r; \omega, k) e^{ikz} dk$$

であるから、 $r=a$ で境界条件を満たすためには

$$AT_0(a; \omega, k) = g_0(\omega, k)$$

でなければならない。この式から A が決まり、(3.10) 式は

$$\begin{aligned} u_\varphi(r, z; \omega) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(a)}{T_0(a)} g_0(\omega, k) \\ &\quad \times \frac{V_0(r)}{V_0(a)} e^{ikz} dk \end{aligned}$$

と書きかえられる。

上式を k について積分しようとする、 k が特性方程式 (3.5) を満たす k で被積分関数の分母 $T_0(a)$ が 0 になるという問題が生じる。これは表面波や境界波に特有の問題である。そこで定石にしたがって、実軸上の積分を複素 k 平面上の積分に変換し、 $T_0(a; \omega, k_n) = 0$ となる留数の寄与だけを取り出せば

$$\begin{aligned} u_\varphi(r, z; \omega) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} A_T(\omega, n) g_0(\omega, k_n) \\ &\quad \times \frac{V_0(r; \omega, k_n)}{V_0(a; \omega, k_n)} e^{ik_n|z|} \end{aligned} \quad (3.11)$$

が得られる。 $V_0(r; \omega, k_n)$ は固有値 $k = k_n$ における固有関数を意味している。 \sim は留数からの寄与だけを表すという意味で用いており、以下でもこの記号を用いる。また

$$\begin{aligned} A_T(\omega, n) &= -V_0(a; \omega, k_n) \\ &\quad \times \left[\frac{\partial T_0(a; \omega, k)}{\partial k} \right]_{k=k_n}^{-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

は振れモードの振幅応答関数である。負号は A_T が正になるように選んである。(3.11) 式は構造のみによって決まる振幅応答関数 A_T , 外力によって決まる g_0 と、壁面の値で正規化された固有関数 $V_0(r)/V_0(a)$ の積という簡単な形をしている。

(3.11) 式を ω に関してフーリエ逆変換すれば時間軸上の解が求められる。このようにノーマルモードの和とし

て合成波形を計算する方法は、一旦分散曲線を計算して固有関数や振幅応答を求めておけば、任意の r, z における波形は (3.11) 式の和を計算しなおすだけでよいから、 r, z ごとに波数積分を実際に数値積分する方法⁵⁾⁶⁾⁷⁾や、差分法などを用いた数値シミュレーション⁸⁾などに比べてはるかに効率的であるし、波群の出自が明確であるという点でもメリットがある。ただし (3.11) 式では分岐線積分や、リーマン面上に存在するかもしれない複素根からの寄与は無視している。しかし分岐線からの寄与を (3.11) 式に加えることはそれほど困難なことではない⁹⁾。

上の議論では減衰がないとしてしている。減衰がある場合には (3.5) 式を満たす k は複素数になるが、その場合でも (3.11) 式などは成り立つ。しかし減衰がある場合には、複素固有値を求めるのが非常に難しい。一方、この場合には波数積分 (3.10) 式の積分路には極が存在しないので、積分定数 A を決めた上で (3.10) 式を数値積分することも可能である。これは離散的波数積分法 (discrete wavenumber method) にほかならない。この方法はさきにあげた著者らがとっている方法である。

3.2 縦波モード

縦波モード (longitudinal mode) という名前は疎密波 (compressional wave) の意味で用いる縦波とまぎらわしいが、習慣にしたがってこう呼んでおく。はじめに空孔、すなわちトンネル波の場合を考える。ここでの議論は孔井が液体で満たされたときの議論の基礎になる。

3.2.1 縦波モードの運動方程式

このモードの変位と応力は (2.1), (2.2) 式から

$$\begin{aligned} u_r &= W_0(r)e^{i(kz-\omega t)} & u_\varphi &= 0 \\ u_z &= iU_0(r)e^{i(kz-\omega t)} & & (3.13) \\ \sigma_{rr} &= P_0(r)e^{i(kz-\omega t)} & \sigma_{r\varphi} &= 0 \\ \sigma_{zr} &= iS_0(r)e^{i(kz-\omega t)} & & \end{aligned}$$

の形に表される。変形が φ によらないから r 方向には一様に伸びたり縮んだりし、また z 方向にも伸びたり縮んだりする。これは平板の場合の対称モード、あるいはソーセージモードと呼ばれるモードに対応している (図-2(a))。

(2.3) 式から $dW_0/dr, dU_0/dr$ を解き、(2.4) 式から dW_0/dr を消去すれば、 W_0, U_0, P_0, S_0 に関する4元の連立一次常微分方程式が得られる。これは次のように書いておくこと数値計算に便利である。

まず

$$\mathbf{y}(r) = r^{1/2} [W_0(r), P_0(r), U_0(r), S_0(r)]^T \quad (3.14)$$

によって四次元列ベクトルを定義する。 T は転置を意味している。 $r^{1/2}$ を掛けてあるのは以下の微分方程式の対

称性をよくするためである。このベクトルの成分は連立常微分方程式

$$\frac{dy_i(r)}{dr} = \sum_{j=1}^4 a_{ij}(r)y_j(r) \quad (3.15)$$

を満足しなければならない。係数行列 $a_{ij}(r)$ は (2.3) 式と、(2.4) 式から dW_0/dr を消去した式から次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu}\right) & a_{12} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \\ a_{13} &= \frac{k\lambda}{\lambda + 2\mu} \\ a_{21} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)r^2} - \rho\omega^2 & a_{22} &= -a_{11} \\ a_{23} &= -\frac{2k\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)r} & a_{24} &= k \\ a_{31} &= -a_{24} & a_{33} &= \frac{1}{2r} & a_{34} &= \frac{1}{\mu} \\ a_{41} &= a_{23} & a_{42} &= -a_{13} \\ a_{43} &= \frac{4k^2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} - \rho\omega^2 & a_{44} &= -a_{33} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ここに示されていない a_{ij} は 0 である。

運動方程式 (3.15), (3.16) 式は振れモードとは違って、 k について陽には偶ではない。しかし k を $-k$ で置きかえたときには U_0 と S_0 の符号を反対にしてやれば全く同じ方程式になるから、 k が固有値なら $-k$ も固有値である。

微分方程式 (3.15) を積分するときに、振れモードと同様に $r > R$ では媒質が一様であると仮定する。媒質が一様なときに $r \rightarrow \infty$ で指数関数的に 0 なる解は (2.6), (2.7) 式から導くことができる。P 波の解 (2.6) 式からは

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{d}{dr} K_0(\omega\hat{\xi}r) & U_0 &= kK_0(\omega\hat{\xi}r) \\ P_0 &= (2k^2\mu - \rho\omega^2)K_0 - \frac{2\mu}{r} \frac{dK_0}{dr} \\ S_0 &= 2k\mu \frac{dK_0}{dr} & \hat{\xi} &= \sqrt{p^2 - \alpha^{-2}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

が得られる。(2.7) 式からは S 波に対応する解

$$\begin{aligned} W_0 &= -k \frac{d}{dr} K_0(\omega\hat{\eta}r) \\ U_0 &= -(\omega\hat{\eta})^2 K_0(\omega\hat{\eta}r) \\ P_0 &= -2k\mu \frac{d^2 K_0}{dr^2} \\ S_0 &= (\rho\omega^2 - 2k^2\mu) \frac{dK_0}{dr} & \hat{\eta} &= \sqrt{p^2 - \beta^{-2}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

が得られる。 $\hat{\xi}, \hat{\eta}$ は実数でなければならないから $p > 1/\beta$, すなわち位相速度 c は β よりも小さくなければならない。

$r = R$ で (3.17) 式から計算した値を初期値として微分方程式 (3.15) 式を積分して得られる解を $\mathbf{y}_A(r)$, (3.18)

式を初期値として得られた解を $\mathbf{y}_B(r)$ とする。一般解はこれら 2 組の解の線型結合 $A\mathbf{y}_A(r) + B\mathbf{y}_B(r)$ であるから、孔壁で二つの応力成分が 0 になるという条件は

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &\sim Ay_{2A}(a) + By_{2B}(a) = 0 \\ \sigma_{zr} &\sim Ay_{4A}(a) + By_{4B}(a) = 0\end{aligned}\quad (3.19)$$

と表される。ここに y_{2A} はベクトル \mathbf{y}_A の第二成分を意味している。上式から特性方程式は

$$\begin{vmatrix} y_{2A}(a) & y_{2B}(a) \\ y_{4A}(a) & y_{4B}(a) \end{vmatrix} = 0\quad (3.20)$$

となる。

一様な媒質の中に空孔が明いているときには、 \mathbf{y}_A として (3.17) 式そのもの、 $\mathbf{y}_B(r)$ として (3.18) 式そのものを用いることができる。先に示した $K_m(x)$ の漸近展開を用いてこの特性方程式の $\omega \rightarrow \infty$ における近似を求めると、これがレーリー波の特性方程式になることは容易にわかる。したがって、捩れモードとは違い、この場合には均質でも解が存在することがわかる。ただし、均質な半平面を伝わるレーリー波では周波数 0 から無限大まで位相速度は同じであるが、空孔の場合には遮断波数で S 波速度になり、以下高周波になるにつれてレーリー波の速度に収束する (付録 A 参照)。したがってこの波は分散性ではあるが、S 波速度とレーリー波の速度の差は小さいから、分散性は強くない。

上で述べたような、2 組の独立解を積分して (3.20) 式から固有値を求める方法では高周波の固有値が密集しているところでは、(3.20) 式の計算で桁落ちが起きるために、固有値が正確に求められないことがある。そこでコンパウンド行列による方法を用いる (Takeuchi and Saito, 1972)¹⁰⁾。先の 2 組の解から

$$Y_{ij}(r) = \begin{vmatrix} y_{iA}(r) & y_{iB}(r) \\ y_{jA}(r) & y_{jB}(r) \end{vmatrix} \quad i < j\quad (3.21)$$

を定義する。独立な Y_{ij} は 6 個あるが運動方程式と無限遠での放射条件から

$$Y_{12}(r) + Y_{34}(r) \equiv 0$$

が成り立つので、実質的には 5 個が未知関数になる。この新しい変数も常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dY_{11}}{dr} &= a_{23}Y_{13} + a_{24}Y_{14} - a_{13}Y_{23} \\ \frac{dY_{13}}{dr} &= (a_{11} + a_{33})Y_{13} + a_{34}Y_{14} + a_{12}Y_{23} \\ \frac{dY_{14}}{dr} &= -2a_{13}Y_{12} + a_{43}Y_{13} \\ &\quad + (a_{11} - a_{33})Y_{14} + a_{12}Y_{24} \\ \frac{dY_{23}}{dr} &= 2a_{24}Y_{12} + a_{21}Y_{13} \\ &\quad - (a_{11} - a_{33})Y_{23} + a_{34}Y_{24} \\ \frac{dY_{24}}{dr} &= -2a_{23}Y_{12} + a_{21}Y_{14}\end{aligned}\quad (3.22)$$

$$+ a_{43}Y_{23} - (a_{11} + a_{33})Y_{24}$$

を満たす。 a_{ij} は (3.16) 式に与えられたものである。この方法はもとの方程式 (3.15) に比べて複雑になっているように見えるが、もとの方程式では \mathbf{y}_A と \mathbf{y}_B の 2 組、計 8 個の未知関数を積分しなければならないのに対し、新しい方法では 5 個の未知関数を積分するだけであるから、精度が高いだけでなく、かえって効率的なのである。(3.17), (3.18) 式から計算した $r = R$ における $y_{iA}(r)$, $y_{iB}(r)$ の値から $Y_{ij}(r)$ の初期値を計算し、この微分方程式を積分すれば

$$Y_{24}(a; \omega, k) = 0\quad (3.23)$$

が特性方程式である。また群速度も (3.22) 式を ω や k で偏微分した式を積分することにより $\partial Y_{24}/\partial \omega$, $\partial Y_{24}/\partial k$ を求め、(3.8) 式の $T_0(a)$ を $Y_{24}(a)$ で置きかえることによって計算できる。縦波モードの場合にも減衰がなければ固有値は実数である。

固有値が求められると固有値に対応する固有関数 $W_0(r)$, $U_0(r)$ を計算することができる。そのためには改めて (3.15) 式を積分しなければならないが、孔壁における u_r と u_z の比は $Y_{ij}(a)$ の値から知ることができる。これはレーリー波のいわゆる H/V 比に相当する量である。固有値に対しては (3.19) 式の第二式が成り立っているから、これを用いて B を A で表し、孔壁における $y_1(r)$ の値を計算すると

$$\begin{aligned}y_1 &= Ay_{1A} + By_{1B} = \frac{y_{1A}y_{4B} - y_{1B}y_{4A}}{y_{4B}}A \\ &= Y_{14} \frac{A}{y_{4B}}\end{aligned}$$

が得られる。引数は $r = a$ である。同様に $y_3(a)$ を計算して両者の比を作ると

$$\frac{U_0(a)}{W_0(a)} = \frac{Y_{34}(a)}{Y_{14}(a)} = -\frac{Y_{12}(a)}{Y_{14}(a)}$$

が得られる。そこでここでは

$$\varepsilon_0(\omega, k_n) = -\frac{U_0(a)}{W_0(a)} = \frac{Y_{12}(a)}{Y_{14}(a)}\quad (3.24)$$

と定義する。右辺はもちろん $k = k_n$ における値である。符号は孔壁を地表と見立てたときに $\varepsilon_0 > 0$ が順転、 $\varepsilon_0 < 0$ が逆転 (retrograde) になるように決めてある。なお、(3.24) 式は孔壁で剪断応力 σ_{zr} が 0 という条件だけから導かれたものであるから、空孔でなく $r < a$ に液体が詰まっているときにも成り立つ。

3.2.2 空孔を伝わる縦波の分散曲線

表-1 はこれからの数値計算に用いるモデルを示している。これらのモデルは孔井の半径 a 、孔内の液体中の音波速度 α_0 、密度 ρ_0 を単位とした無次元モデルである。したがって時間の単位は a/α_0 、周波数の単位は α_0/a と

なる。Model-1 は空孔の場合、Model-2 と 3 は孔内に液体が入っている場合である。Model-2 は孔外が一様な固体の場合で、このモデルは Cheng and Toksöz (1981)⁶⁾ が用いたモデルの一つにほぼ等しい。Model-1 と 3 には孔壁に半径の 1/2 の厚さの低速度層が入っている。その外側は Model-2 と同じである。

図-3(a) は空孔を伝わる縦波モードの分散曲線の一例である。運動方程式 (3.22) の積分にはルンゲ・クッタ・ゲル法を用い、積分ステップは $\Delta r = 0.02$ を用いた。構造は表-1 に示してある Model-1 である。図の横軸は無次元の周波数で、次元のある量を用いたときには fa/α_0 を表す。

Model	ρ_0	α_0	h_1	ρ_1	α_1	β_1	ρ_2	α_2	β_2	Figs.
1	-	-	0.5	1.50	1.35	0.80	2.00	2.50	1.50	3,6,7
2	1.00	1.00	∞	2.00	2.50	1.50				4,8,10,12
3	1.00	1.00	0.5	1.50	1.35	0.80	2.00	2.50	1.50	5,9,11,13~16

表-1 孔井のモデル。孔井の半径は $a = 1$ 、孔井内の密度は $\rho_0 = 1$ 、音波速度は $\alpha_0 = 1$ に正規化してある。地層は Model-2 では一様、Model-1, 3 では内側に厚さ $h_1 = 0.5$ の低速度層がある。

Table 1 Nondimensional physical parameters used in this study. The radius of the borehole is $a = 1$, ρ_0 and α_0 are the density and the sound velocity of the fluid. The formation in Model-2 is uniform, while in Model-1 and 3 there is a low velocity inner zone of thickness $h_1 = 0.5$.

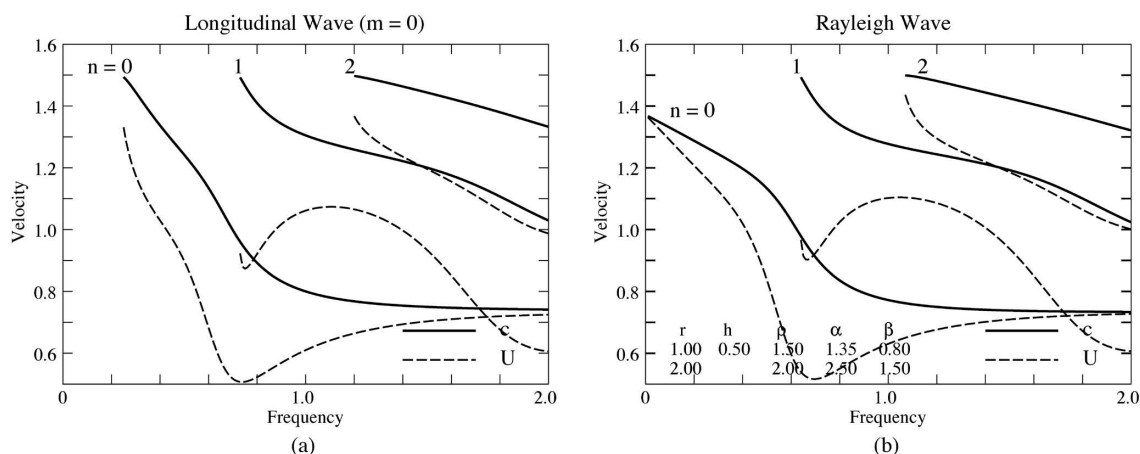


図-3 (a) 空孔の表面を伝わる縦波モードの分散曲線。 n は高調波の次数。(b) 平面境界を伝わるレーリー波の分散曲線。構造は表-1 の Model-1。

Fig. 3 Dispersion curves of longitudinal wave along an empty hole (a) and of Rayleigh wave (b) for the Model-1. n indicates the order number of higher modes.

図-3(a) の実線は位相速度 c 、波線は群速度 U を表している。 n は高次モードの次数である。先にも述べたように、一様な構造の場合には分散が小さいが、ここでは孔壁に孔井の半径の半分の厚さの低速度層があるために分散が大きくなっている。基本モード ($n = 0$) の位相速度は無次元周波数 $f = 0.2$ 付近で外層の S 波速度 β_2 に達し、高周波では内層のレーリー波の速度に収束している。一方、高次モード ($n > 0$) は遮断周波数では基本モードと同じく外層の S 波速度、この図ではよく見えないが、高周波では内層の S 波速度に収束している。比較のために図-3(b) には同じ構造に対する平面問題におけるレーリー波の分散曲線を示してある。よく知られてい

るように、レーリー波の基本モードの位相速度は $\omega = 0$ の極限で下層のレーリー波の速度になる。この例の場合、平面問題と円筒問題は基本モードに遮断周波数があるかないかの違いだけで、ほかの部分ほとんど同じ形の分散曲線になっている。

3.2.3 縦波モードの励起

縦波モードの励起についても、振れモードと同様な計算を行なうことができる。ここでは簡単のために空孔の表面 $r = a$ で垂直応力 σ_{rr} だけが与えられたとして、そ

の周波数-波数スペクトルを $h_0(\omega, k)$ とする。すなわち

$$\sigma_{rr}(a, z; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\omega, k) e^{ikz} dk$$

が与えられているとする。境界条件はこんどは (3.19) 式の第一式の右辺が 0 でなくなり

$$\begin{aligned} Ay_{2A} + By_{2B} &= a^{1/2} h_0 \\ Ay_{4A} + By_{4B} &= 0 \end{aligned}$$

になる。これから積分定数 A, B を決め、孔壁における r 方向の変位を求めると

$$\begin{aligned} y_1(a) a^{-1/2} &= [Ay_{1A}(a) + By_{1B}(a)] a^{-1/2} \\ &= \frac{Y_{14}(a)}{Y_{24}(a)} h_0 \end{aligned}$$

になる。波数積分の留数からの寄与を計算すると次のようになる。

$$u_r(a, z; \omega) \sim -i \sum_n A_L(\omega, n) h_0(\omega, k_n) e^{ik_n |z|}$$

ただし振幅応答は

$$\begin{aligned} A_L(\omega, n) &= -Y_{14}(a; \omega, k_n) \\ &\times \left[\frac{\partial Y_{24}(a; \omega, k)}{\partial k} \right]_{k=k_n}^{-1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

で定義される。 k_n は特性方程式 (3.20) の根である。上式に負号がついているのは A_L が正になるようにしたからである。また Y_{24} の偏微分は群速度を求めるために計算済みのものである。 A_L は構造のみによって決まる量で、孔壁に単位の垂直応力が働いたときの孔壁における垂直変位という意味をもっている。

固体内部の解を求めるには固有値 k_n における固有関数 $W_0(r, z; \omega, k_n)$ などを求め

$$\begin{aligned} u_r(r, z; \omega) &\sim -i \sum_n A_L(\omega, n) h_0(\omega, k_n) \\ &\times \frac{W_0(r; \omega, k_n)}{W_0(a; \omega, k_n)} e^{ik_n |z|} \end{aligned} \quad (3.26)$$

とすればよい。 u_z は分子の $W_0(r; \omega, k_n)$ を固有関数の z 成分 $U_0(r; \omega, k_n)$ で置きかえればよい。

(3.26) 式は振れ波の (3.11) 式と同様に、振幅応答、外力、固有関数の積という簡単な形で表されている。この形は後で議論する孔井に液体が入っている場合や、非軸対称の波についても同様である。

孔壁で σ_{rr} だけでなく、 σ_{zr} も与えられた一般の場合は §5.2 を参考にすればよい。

4. 孔井中を伝わる軸対称音波

これまでは円筒の内部が空の場合を考えてきた。つぎに内部が液体で満たされた場合の軸対称波を考える。これは孔井中を伝わる波として実用的には最も重要な波である。以下では孔井中の密度 ρ_0 、音波速度 α_0 は一定で

あるとする。振れモードでは孔井中に液体が入っていてもいなくても同じであるから、ここで問題にするのは縦波モードだけである。

4.1 軸対称孔井波の分散

一様な媒質中の縦波モードの解は (2.6)~(2.8) 式に与えられているが、 $r < a$ の液体中の解には S 波の解は必要ない。孔井内では $r = 0$ で解が発散しないためには通常のベッセル関数 $J_m(x)$ 、あるいは変形ベッセル関数 $I_m(x)$ を用いなければならない。ベッセル関数を用いた解は

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{d}{dr} J_0(\omega \xi_0 r) = -\omega \xi_0 J_1(\omega \xi_0 r) \\ P_0 &= -\rho_0 \omega^2 J_0(\omega \xi_0 r) \quad \xi_0^2 = \alpha_0^{-2} - p^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

と表すことができる。 $\xi_0^2 > 0$ のときには上式をそのまま用いればよいが、 $\xi_0^2 < 0$ のときには

$$J_m(ix) = i^m I_m(x) \quad x > 0$$

の関係を用いて第一種変形ベッセル関数 $I_m(x)$ で置きかえなければならない。

孔井内の解が得られたから、これを孔井外の固体中の解につなげなければならない。孔壁では変位の垂直成分 u_r と、応力の垂直成分 σ_{rr} が連続でなければならない。孔井外の一般解 $Ay_A + By_B$ とつなげるために、上の解 (4.1) 式に $r^{1/2}$ を掛けた y ベクトルを y_D とすれば、 $r = a$ における境界条件は

$$\begin{aligned} Ay_{1A}(a) + By_{1B}(a) &= Dy_{1D}(a) \\ Ay_{2A}(a) + By_{2B}(a) &= Dy_{2D}(a) \\ Ay_{4A}(a) + By_{4B}(a) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。 D は解 (4.1) に対する積分定数である。第三式は固体側の剪断応力 σ_{zr} が孔壁で 0 になるという条件である。上式から特性方程式は

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= -y_{1D}(a)Y_{24}(a) + y_{2D}(a)Y_{14}(a) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

と表される。 $Y_{ij}(r)$ は §3.2 に述べた方法で積分できるので、上式から分散曲線を求めることができる。また孔壁における H/V は同じく (3.24) 式で定義される。

孔壁に垂直応力が働いたときには境界条件は (4.2) 式の第二式が

$$Ay_{2A} + By_{2B} = Dy_{2D} + a^{1/2} h_0$$

に変わる。これらの式から D を求めて孔壁における変位 u_r を計算すると

$$Dy_{1D}(a) a^{-1/2} = -\frac{y_{1D}(a)Y_{14}(a)}{\Delta_0} h_0$$

が得られる。 Δ_0 は (4.3) 式である。波数積分の留数からの寄与は (3.26) 式とまったく同じ形に書くことができる。

$$u_r(r, z; \omega) \sim -i \sum_n A_0(\omega, n) h_0(\omega, k_n) \times \frac{W_0(r; \omega, k_n)}{W_0(a; \omega, k_n)} e^{ik_n|z|} \quad (4.4)$$

σ_{rr} は上式の分子の $W_0(r)$ を $P_0(r)$ で置きかえることによって得られる。また

$$A_0(\omega, n) = y_{1D}(a) Y_{14}(a; \omega, k_n) \times \left[\frac{\partial \Delta_0}{\partial k} \right]_{k=k_n}^{-1} \quad (4.5)$$

である。 W_0 , P_0 は $k = k_n$ における固有関数であるが、孔井中 $r \leq a$ では (4.1) 式から計算することができる。

4.2 孔井波の分散曲線の例

図-4 は一様な媒質中の孔井波の分散曲線の一例である。媒質のパラメータは表-1 に示してある Model-2 である。図-4(a) は位相速度と群速度の分散曲線を表している。空孔の場合とは違って、基本モード ($n = 0$) には遮断周波数がなく、周波数 0 の極限はチューブ波と呼ばれる。孔井外が密度 ρ , S 波速度 β の一様な固体のとき、チューブ波の位相速度 c は

$$\left(\frac{\beta}{c} \right)^2 = \left(\frac{\beta}{\alpha_0} \right)^2 + \frac{\rho_0}{\rho} \quad (4.6)$$

で与えられ、固体の P 波速度が含まれない非常に不思議な形をしている (付録 B)。この解は $c < \alpha_0$ であるから孔井内では円錐波ではなく境界波として伝わっている。一方、基本モードの高周波の極限は液体-固体の平面境界に沿って伝わるストンレー波である。この波は常に存在する。この例の場合、チューブ波の位相速度は $c = 0.9045$, ストンレー波の位相速度は $c = 0.9665$ でその差が小さいので、基本モードの分散は非常に弱い逆分散をしている (速度が周波数とともに増加する)。チューブ波が無限遠での放射条件を満たすためには (4.6) 式の c が $c < \beta$ を満たさなければならないが、この条件が破られたときには基本モードの位相速度はストンレー波の速度から低周波にむかって増加し、 $c = \beta$ で遮断周波数に達する。

図-4 の基本モードの位相速度は液体中の音速、孔壁の S 波速度のどちらよりも遅い。したがって孔井中の ξ_0 , 固体中の ξ がともに虚数になり、これは純粋な境界波を意味している。 ξ_0 が虚数であるから、孔井中の解は第一種変形ベッセル関数で表され、変位 $W_0(r)$ は中心で 0, 孔壁で最大になる。圧力 $P_0(r)$ は中心では有限の値をとるが、やはり孔壁に向かって増加する。

これに対して高次モード ($n > 0$) は遮断周波数で位相速度は孔壁の S 波速度になり、高周波では液体の音速に収束する ($\alpha_0 < \beta$ のとき)。ここでは ξ_0 が実数である

から、液体中で音波は円錐波として多重反射を繰り返している。ここでは $\alpha_0 < \beta$ の例を示したが、 $\alpha_0 > \beta$ の構造では高次モードは存在しなくなる。無限遠の放射条件により $c < \beta$ で、しかも液体中で円錐波であるために $c > \alpha_0$ となるような条件は満たされないからである。

図-4(b) は (4.5) 式で定義された振幅応答 (偶数次は実線, 奇数次は破線) と, (3.23) 式で定義された ε_0 , いわゆる H/V である (鎖線)。基本モードの振幅応答は周波数 0 で 0, そこから急速に一定値に近づく。高次モードの振幅応答は遮断周波数で 0, 群速度が極小となる周波数よりやや低周波側で極大をもち、高周波に向かつては指数関数的に減少する。極大値は基本モードの値より大きい。また ε_0 は高周波でストンレー波の値に収束する。

図-5 は孔壁に厚さが孔の半径の半分の低速度層が存在する、固体側の構造が図-3 と同じ構造に対する分散曲線である。この場合にはチューブ波の位相速度の方がストンレー波の位相速度よりも速くなっているので、基本モードは図-4 と違って正分散をしている。低速度層が存在するために高次モードの遮断周波数は図-4 に比べて低くなっている。高次モードの位相速度は最外層の S 波速度 $\beta_2 = 1.50$ から孔壁の S 波速度 $\beta_1 = 0.80$ まで変化するが、途中で孔井内の音速 $\alpha_0 = 1.00$ を横切る。これより低周波側では孔井内の音波は円錐波であるが、これより高周波側では境界波として振舞う。すなわち一本の分散曲線上でも周波数によって波の性格は異なっている。これは図-3 の基本モードでも同じである。

図-5(b) は振幅応答を示している。基本モードは地層が均質なときと同じような形をしているが、図-4 に比べて 1 桁以上大きくなっている。これに対して高次モードは形は図-4 よりもはるかに複雑に変化しているが、全体的な大きさは図-4 とほぼ同じである。すなわち、孔壁に低速度層があることによって基本モードのチューブ波-ストンレー波のモードが選択的に伝播するようになる。ただし図-4, 5 とともに、基本モードの振幅応答は低周波で急速に減衰しているの、いわゆるチューブ波が大振幅で伝播することは考えにくい。しかし実際の波形のスペクトルはこの応答に振源のスペクトルと固有関数のスペクトルを掛けたものであるから、振幅応答だけから判断するのは危険である。この点は §6 で詳しく議論する。

なお、図-4, 5 の高次モードはときにシュード・レーリー波 (pseudo-Rayleigh wave) と呼ばれることがある。本来、シュード・レーリー波は平面境界で液体と固体が接しているときに存在する固有値 k_n が複素数、したがって伝播にともなって減衰する波であるが、ここでの高次モードは実固有値に属している。したがってこの言葉は誤解をまねきやすい言葉なので、ここでは用いない。なお Cheng and Toksöz (1981)⁶⁾ は誤解を避けるために 'psuedo-Rayleigh (reflected)' という言葉を提案しているが、上で述べたように必ずしも反射波だけではないので、これでわかりやすくなったとはいえない。

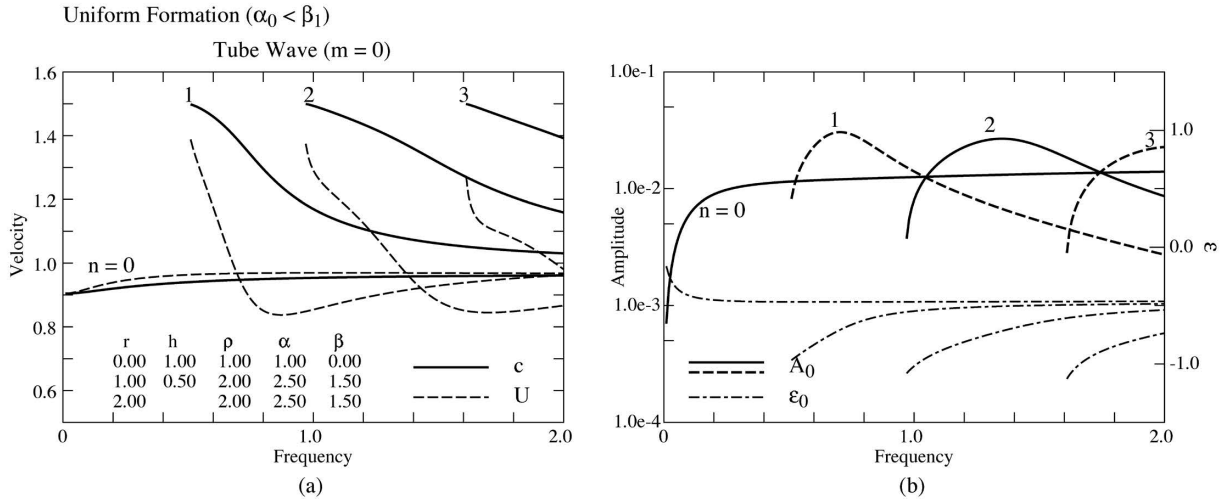


図-4 均質な媒質中の孔井を伝わる軸対称波の分散曲線。(a) 位相速度(実線)と群速度(破線)。(b) 振幅応答(実線と破線)と H/V 比(鎖線)。構造は Model-2。

Fig. 4 Dispersion curves of axi-symmetric longitudinal wave along a fluid-filled borehole in a homogeneous formation (Model-2). (a) Phase velocity(solid line) and group velocity (broken line). (b) Transfer functions (solid line and broken line) and H/V (chained line).

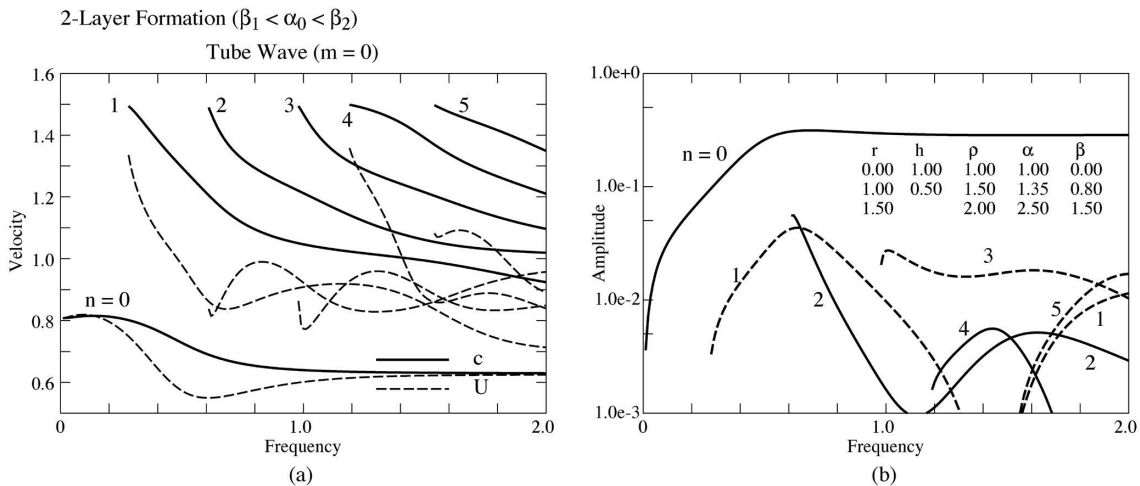


図-5 孔井の周囲に低速度層がある場合の軸対称波の分散曲線。(a) 位相速度と群速度。(b) 振幅応答。構造は Model-3。

Fig. 5 Dispersion curves of axi-symmetric longitudinal wave along a fluid-filled borehole in a 2-layer formation (Model-3). (a) Phase and group velocities. (b) Transfer function.

4.3 固体-液体境界における解の接続

上では固体と液体が孔壁で接している場合だけを考えましたが、固体と液体が互層になっている場合もある。たとえば孔の中心にツールがある場合、あるいはケーシングの裏側に泥水が入っているときなどである。このような場合には固体-液体を横切って運動方程式(3.15)式を積分しなければならない。

液体中では実は(3.15)式はそのままの形では成り立たない。液体中では y_4 は恒等的に 0 であるから、(3.15)式の第四式から

$$y_3 = -\frac{k}{\rho\omega^2}y_2$$

が得られる。これを第一式に代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dr} &= -\frac{1}{2r}y_1 + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{k^2}{\rho\omega^2}\right)y_2 \\ \frac{dy_2}{dr} &= -\rho\omega^2y_1 + \frac{1}{2r}y_2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

となる。液体中はこの方程式を用いて積分することになる。問題は固体-液体の境界条件である。

固体中の独立解を y_A, y_B とし、液体中の解を y_f とする。境界では垂直変位と垂直応力が連続で剪断応力は

0 であるから、積分定数を A, B, D とすれば境界では

$$\begin{aligned} Ay_{1A} + By_{1B} &= Dy_{1f} \\ Ay_{2A} + By_{2B} &= Dy_{2f} \\ Ay_{4A} + By_{4B} &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

が成り立たなければならない。境界に平行な方向の変位には滑りがあっても構わないから、 y_3 に関する境界条件はいらない。積分の方向によって二つの場合が考えられる。

固体 → 液体 固体から液体に向かって積分する場合には上式の左辺の $\mathbf{y}_A, \mathbf{y}_B$ が既知であるから、第三式からたとえば B を求め第一、二式に代入すれば

$$\begin{aligned} (y_{1A}y_{4B} - y_{1B}y_{4A})\frac{A}{y_{4B}} &= Dy_{1f} \\ (y_{2A}y_{4B} - y_{2B}y_{4A})\frac{A}{y_{4B}} &= Dy_{2f} \end{aligned}$$

が得られる。固体中で Y_{ij} を積分していたとすれば、境界で

$$\begin{aligned} y_{1f} &= Y_{14} & y_{2f} &= Y_{24} \\ D &= \frac{A}{y_{4B}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

とすれば境界条件 (4.8) 式を満足させることができる。こうして決まった \mathbf{y}_f を初期値として液体内で (4.7) 式の積分を行えばよい。 Y_{ij} だけからは積分定数 A と D の比は決まらないが、固有値を求めるには差し支えない。

液体 → 固体 液体から固体に向かって積分するときには境界で y_{1f} と y_{2f} しかわからないから、(4.8) 式を満足させることはできないように思われる。しかし境界でスリップが許されることを考慮すれば次のようにして境界条件を満足させることができる。

次のような 2 組の境界値を考える。

$$\begin{aligned} y_{1A} &= y_{1f} & y_{1B} &= 0 \\ y_{2A} &= y_{2f} & y_{2B} &= 0 \\ y_{3A} &= 0 & y_{3B} &= 1 \\ y_{4A} &= 0 & y_{4B} &= 0 \end{aligned}$$

$A = D$ とすれば上の境界値が境界条件 (4.8) 式を満たしていることは明らかである。この境界値から Y_{ij} の境界値を求めれば

$$Y_{13} = y_{1f} \quad Y_{23} = y_{2f} \quad (4.10)$$

となる。上記以外の Y_{ij} は 0 である。これを初期値として固体内の積分を続ければよい。以上のようにして固体、液体の任意の組み合わせに対して運動方程式 (3.22) 式と (4.7) 式を積分していくことができる。ただしこの方法では固有関数を求めることはできない。固有関数を求めるにはもとの式 (3.15) 式に戻って、独立解 \mathbf{y}_A と \mathbf{y}_B を積分し、固体-液体境界で (4.7) 式の解と境界条件を満足するように (4.8) 式から積分定数を決めてやらなければならない。

5. 非軸対称モード

軸対称でない場合 ($m \neq 0$) には、軸対称の場合の振れモードと縦波モードのように二組の解に分離することができない。平面問題の場合には軸対称でない場合でも SH 波成分と P-SV 成分に分離することができた。しかも固有値は方位角方向の波数 m には依存しない。いいかえれば、平面問題の場合には固有値は m に関して縮退している。このために平面問題の場合にはラブ波とレーリー波の軸対称の分散曲線を求めておけば、あとは固有関数の方位依存性だけを考慮すればよかった。しかし非軸対称の場合には変位の三成分を同時に未知関数として取り扱わなければならないし、表面波、境界波の固有値も軸の周りの波数 m に依存する。

5.1 非軸対称波の運動方程式

円筒座標系において媒質の密度や弾性定数が r に依存するときの運動方程式の一般的な形は (2.3) 式, (2.4) 式に導いてある。これを連立常微分方程式の形にするために、軸対称のときにならって

$$\mathbf{y}(r) = r^{1/2} [W_m(r), P_m(r), U_m(r), S_m(r), V_m(r), T_m(r)]^T \quad (5.1)$$

によって 6 元列ベクトルを定義すると、 $\mathbf{y}(r)$ の成分 $y_i(r)$ はつぎの微分方程式を満足しなければならない。

$$\frac{dy_i(r)}{dr} = \sum_{j=1}^6 a_{ij}(r)y_j(r) \quad i = 1 \sim 6 \quad (5.2)$$

これは (3.15) 式を拡張したものになっている。係数はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) & a_{12} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \\ a_{13} &= \frac{k\lambda}{\lambda + 2\mu} & a_{15} &= \frac{m\lambda}{(\lambda + 2\mu)r} \\ a_{21} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)r^2} - \rho\omega^2 & a_{22} &= -a_{11} \\ a_{23} &= -\frac{2k\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)r} & a_{24} &= k \\ a_{25} &= -\frac{4m\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)r^2} & a_{26} &= \frac{m}{r} \\ a_{31} &= -a_{24} & a_{33} &= \frac{1}{2r} & a_{34} &= \frac{1}{\mu} \\ a_{41} &= a_{23} & a_{42} &= -a_{13} \\ a_{43} &= \mu \left[\frac{4k^2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} + \frac{m^2}{r^2} \right] - \rho\omega^2 \\ a_{44} &= -a_{33} & a_{45} &= \frac{mk\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)r} \\ a_{51} &= -a_{26} & a_{55} &= \frac{3}{2r} & a_{56} &= a_{34} \\ a_{61} &= a_{25} & a_{62} &= -a_{15} & a_{63} &= a_{45} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$a_{65} = \mu \left[k^2 + \frac{4m^2(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)r^2} \right] - \rho\omega^2$$

$$a_{66} = -a_{55}$$

指定されていない係数は0である。軸対称 ($m=0$) のときには上式が $y_1 \sim y_4$ と y_5, y_6 の組に分離される。

微分方程式 (5.2) の解は無限遠で放射条件を満足するように積分しなければならない。そのためには、注目する波長よりも十分に大きな R を選び、 $r > R$ では媒質は一様であると仮定する。 $r = R$ で (2.6), (2.7), (2.8) 式を初期値として (5.2) 式を積分して得られる三つの独立解をそれぞれ $\mathbf{y}_A(r)$, $\mathbf{y}_B(r)$, $\mathbf{y}_C(r)$ とする。ただし初期条件として用いる円筒関数 Z_m としては $r \rightarrow \infty$ で指数関数的に0に収束する第二種変形ベッセル関数 K_m を用いなければならない。積分定数を A, B, C とすると、一般解は $A\mathbf{y}_A(r) + B\mathbf{y}_B(r) + C\mathbf{y}_C(r)$ である。積分定数は境界条件から求められる。

この方法を用いてももちろん分散曲線を求めることができるが、精度を上げるためには軸対称解のときと同じようにコンパウンド行列を用いた方がよい。これは上で求めた三組の解から作られる小行列式

$$Y_{ijk}(r) = \begin{vmatrix} y_{iA}(r) & y_{iB}(r) & y_{iC}(r) \\ y_{jA}(r) & y_{jB}(r) & y_{jC}(r) \\ y_{kA}(r) & y_{kB}(r) & y_{kC}(r) \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

を変数とする方法である。ただし y_{iA} は \mathbf{y}_A の i 成分を意味しており、 $i < j < k$ である。この方法は重力を考慮した伸び縮み振動の方程式にこの方法を適用した Saito (1988)¹⁰ に詳しい。そこでの a_{ij} は (5.3) 式とは異なっているが、対称性は同じであるから、 a_{ij} の値を入れかえることによって同じ方法を用いることができる。 $Y_{ijk}(r)$ に対する微分方程式を (5.3) 式の a_{ij} を用いて表すことができるが、あまり長くなるので付録 (C.2) 式に示してある。この式からわかるように、これは14個の未知関数に関する連立常微分方程式である。もとの微分方程式 (5.2) では6個の未知関数を3組解かなければならないから、計算の効率はそれほど差はないが、 Y_{ijk} を用いた方が精度が高い。(C.2) 式の初期値は $r = R$ における y_A, y_B, y_C を (5.4) 式に代入して計算すればよい。 Y_{ijk} を用いてどのように問題を解くかは以下で明らかになる。

5.2 空孔内を伝わる非軸対称波

トンネルのように孔内が空のときは孔壁で応力が0にならなければならない。そのためには

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &\sim Ay_{2A}(a) + By_{2B}(a) + Cy_{2C}(a) = 0 \\ \sigma_{zr} &\sim Ay_{4A}(a) + By_{4B}(a) + Cy_{4C}(a) = 0 \\ \sigma_{r\varphi} &\sim Ay_{6A}(a) + By_{6B}(a) + Cy_{6C}(a) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

が成り立たなければならない。したがって Y_{ijk} の定義 (5.4) 式から

$$Y_{246}(a; \omega, k) = 0 \quad (5.6)$$

が特性方程式である。

上式には陽には示していないが Y_{ijk} は m によるから、固有値は一般に $k_n^m(\omega)$ と書かなければならない。 n は r 方向の波数である。(2.5) 式のところで注意しておいたように、 m と $-m$ に対する固有値は等しいから、 $k_n^{-m}(\omega) = k_n^m(\omega)$ が成り立つ。しかし標記が煩雑になるので添字 m はとくに明示する必要があるとき以外は省略する。

(5.6) 式から固有値 k_n^m が求まったとき、孔壁における H/V に相当する量は非軸対称の場合には二つある。一つは軸対称のときと同様に変位の垂直成分と進行方向の成分の比 U_m/W_m であり、もう一つは進行方向と垂直な成分との比 V_m/W_m である。ここでは

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= -\frac{U_m(a)}{W_m(a)} = -\frac{Y_{126}(a)}{Y_{146}(a)} \\ \delta_m &= \frac{V_m(a)}{W_m(a)} = \frac{Y_{124}(a)}{Y_{146}(a)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

と定義する。これらの関係は (5.5) 式の第二、三式を用いて、軸対称の場合と同様な方法で導くことができる。純粋な縦波モードなら $\delta_m = 0$ 、純粋な振れモードなら $\delta_m = \infty$ になる。

非軸対称モードの励起 トンネルの壁面で外力が応力として与えられたとき、これらは次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(a, \varphi, z; \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \\ &\quad \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m(\omega, k) e^{i(kz+m\varphi)} \\ \sigma_{zr}(a, \varphi, z; \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \\ &\quad \times \sum_m i f_m(\omega, k) e^{i(kz+m\varphi)} \\ \sigma_{r\varphi}(a, \varphi, z; \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \\ &\quad \times \sum_m i g_m(\omega, k) e^{i(kz+m\varphi)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

たとえば $\sigma_{rr}(a, \varphi, z; \omega)$ が与えられているときには、フーリエ級数とフーリエ積分の定理から、 $h_m(\omega, k)$ は

$$\begin{aligned} h_m(\omega, k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} d\varphi \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{rr}(a, \varphi, z; \omega) e^{-ikz} dz \end{aligned}$$

から計算できる。 f_m, g_m についても同様である。これらの係数が与えられると境界条件は (5.5) 式のかわりに

$$\begin{aligned} Ay_{2A}(a) + By_{2B}(a) + Cy_{2C}(a) &= a^{1/2} h_m \\ Ay_{4A}(a) + By_{4B}(a) + Cy_{4C}(a) &= a^{1/2} f_m \\ Ay_{6A}(a) + By_{6B}(a) + Cy_{6C}(a) &= a^{1/2} g_m \end{aligned}$$

を用いなければならない。この式から積分定数 A, B, C を解き、孔壁における変位を求めると、たとえば

$$W_m(a; \omega, k) = a^{-1/2} (Ay_{1A} + By_{1B} + Cy_{1C}) \\ = \frac{Y_{146}}{Y_{246}} \left[h_m - \frac{Y_{126}}{Y_{146}} f_m + \frac{Y_{124}}{Y_{146}} g_m \right] \quad (5.9)$$

となる。 Y_{ijk} は $r = a$ における値である。これを用いて u_r の波数積分から留数の寄与を取り出すと

$$u_r(a, \varphi, z; \omega) \sim -i \sum_{m,n} A_m(\omega, n) \\ \times F_m(\omega, n) e^{i(k_n^m |z| + m\varphi)} \quad (5.10)$$

の形に書くことができる。ここに A_m は振幅応答関数、 F_m は励起関数で、次のように定義される。

$$A_m(\omega, n) = -\frac{Y_{146}}{\partial Y_{246} / \partial k} \quad (5.11)$$

$$F_m(\omega, n) = h_m - \varepsilon_m f_m + \delta_m g_m \quad (5.12)$$

右辺は $r = a$, $k = k_n^m$ における値である。(5.9) 式では k は任意の値であったが上式では k は固有値であるから、(5.7) 式を用いて Y_{ijk} の比を ε_m と δ_m で表している。 A_m は構造のみによって決まる量で、 $f_m = g_m = 0$ のときを考えればこれは孔壁に単位の垂直応力が加えられたときの垂直変位という意味をもっていることがわかる。 F_m は外力のみによって決まる量である。

(5.10) 式は孔壁における垂直変位であるが、任意の r における変位や応力を求めるには各項に固有関数を掛けてやればよい。たとえば

$$u_r(r, \varphi, z; \omega) \sim -i \sum_{m,n} A_m(\omega, n) \\ \times F_m(\omega, n) \frac{W_m(r)}{W_m(a)} e^{i(k_n^m |z| + m\varphi)} \\ \sigma_{rr}(r, \varphi, z; \omega) \sim -i \sum_{m,n} A_m(\omega, n) \\ \times F_m(\omega, n) \frac{P_m(r)}{W_m(a)} e^{i(k_n^m |z| + m\varphi)} \quad (5.13)$$

である。 u_z や σ_{zr} などについても同様に表現できる。ただし、簡単のために固有関数 $W_m(r; \omega, k_n)$ などを単に $W_m(r)$ などと表している。

空孔を伝わる非軸対称波の分散曲線 孔井が空の場合(トンネル波)の基本モード ($n = 0$) の分散曲線の例を図-6に示す。この図には $m = 1 \sim 5$ の非軸対称モードと、比較のために $m = 0$ の縦波モードの基本モードの分散曲線も示してある。層のパラメータは図-3と同じ Model-1 である。

図-6(a) は位相速度と群速度の分散曲線を表している。数字は方位方向の波数 m を表す。ただし $m = 0$ の位相速度は点線で示してあり、曲線には数字を付していない。すべてのモードは遮断周波数で外層 ($r > 1.5$) の S 波速度 β_2 になり、周波数が高くなるにつれて内層 ($1 < r < 1.5$) のレーリー波速度に漸近するという単純

な形をしている。縦波モード ($m = 0$) は遮断周波数では $m = 1$ と $m = 2$ のモードの間にあるが、すぐに $m = 1$ のモードに漸近する。平面問題では基本モードは周波数 0 で位相速度が下層のレーリー波の速度に漸近するがトンネル波ではそうではない。

図-6(b) には非軸対称モードの振幅応答 (5.11) 式と軸対称モードの振幅応答 (3.25) 式 (点線) を示しているが、すべてのモードで遮断周波数で 0、群速度が極小になる周波数付近で弱い極小をもち、その後はモードにほとんどよらない一定値になる。このことは孔壁の一点に力が働いたときのように、すべての m のモードが励起される場合には、すべての m のモードがほとんど同じ振幅で伝播することを意味している (固有関数の m による変化は別にして)。図-6(b) の一点鎖線は (5.7) 式の ε_m 、二点鎖線は δ_m である。曲率の影響が小さくなる高周波では横方向の運動は 0 に近づき ($\delta_m = 0$)、 ε_m は通常のレーリー波の値に近づく。

図-7 はこんどは $m = 1$ に固定して、基本モード ($n = 0$) から 4 次モードまでの分散曲線を示したものである。 $m = 1$ のモードは撓み (flexural) モードと呼ばれている (図-2(b))。数字は半径方向の波数 n である。したがって $n = 0$ のグラフは図-6 の $m = 1$ のグラフとまったく同じである。 $n > 0$ の高次モードでは、基本モードとは異なり、高周波数では位相速度は内層の速度 β_1 に漸近する。しかがって高次モードの S 波成分は表層内で多重反射を行っている。これは平面問題の二層構造におけるレーリー波と同様である。

興味深いのは高周波では $n = 0$ と 1, 2 と 3 次の位相速度が平行になっていることである。それらの間隔は高次になるほど狭くなっているように見える。

図-7(b) には各次数に対する振幅応答を実線と破線で示してある。基本モード ($n = 0$) は高次モードに比べて約 1 桁大きい。(5.10) 式を参照すれば、このことは励起関数 F_m が n によって変わらないならば基本モードが選択的に伝播することを意味している。もう一つの特徴は、偶数次の応答が平坦であるのに対して、偶数次の応答は帯域幅が狭いことである。しかし実際の波形は固有関数によっても左右されるから、振幅応答だけから高次モードの振幅が小さいと判断するのは危険である。この点については §6 で詳しく議論する。

5.3 孔井中を伝わる非軸対称モード

軸対称でない ($m \neq 0$) ときの一様な液体柱内の解は

$$W_m = \frac{dJ_m(\omega\xi_0 r)}{dr} = \frac{1}{r} [mJ_m(\omega\xi_0 r) \\ - (\omega\xi_0 r) J_{m+1}(\omega\xi_0 r)] \quad (5.14) \\ P_m = -\rho_0 \omega^2 J_m(\omega\xi_0 r)$$

で表される。 ξ_0 が虚数になったときの注意は軸対称の

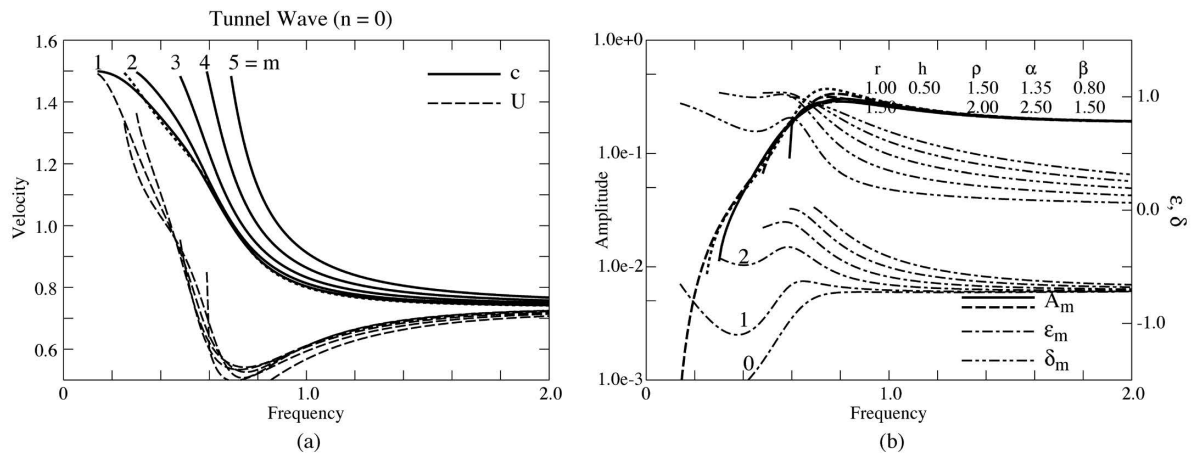


図-6 空孔を伝わる非軸対称波の基本モード。(a) 位相速度(実線)と群速度(破線)。軸対称モード($m = 0$)の位相速度は点線で示してある。(b) 振幅応答(実線, 破線)と ϵ_m (一点鎖線), δ_m (二点鎖線)。構造は Model-1。

Fig. 6 Dispersion curves of fundamental modes of non-axisymmetric surface waves along an empty borehole in Model-1. The phase velocity and the transfer function of axisymmetric mode ($m = 0$) are plotted by dotted lines.

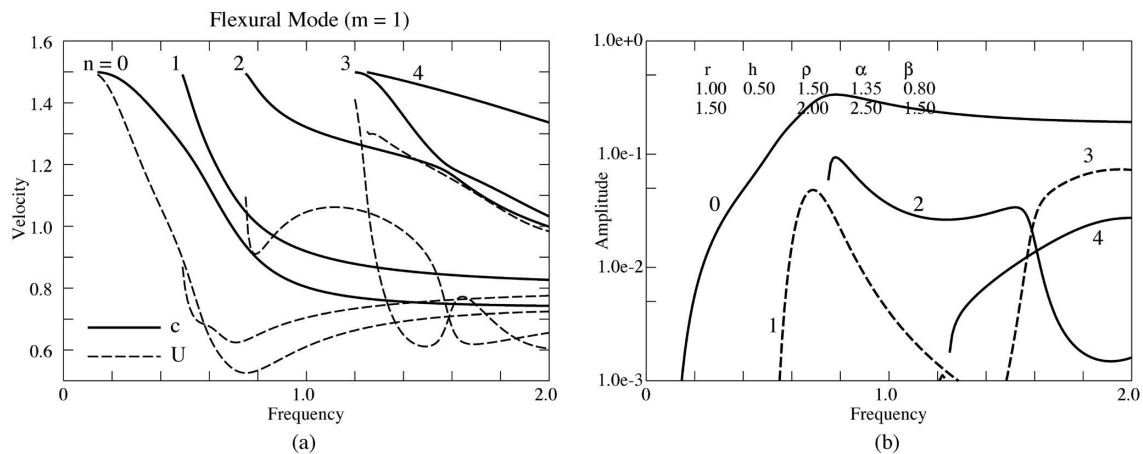


図-7 空孔を伝わる撓みモードの分散。奇数次の振幅応答は破線で示してある。構造は Model-1。

Fig. 7 Dispersion curves of flexural modes of surface waves along an empty borehole in Model-1.

ときと同じである。 $m \neq 0$ のとき、 $J_m(0) = I_m(0) = 0$ であるから、孔井内でイドロフォンなどを用いて圧力変化 ($= -\sigma_{rr}$) を測定するとき、厳密に言えば孔井の中心 $r = 0$ で測定すると上式から圧力は 0 になってしまう。実際の測定器には大きさがあるからそのようなことは起こらないが、感度が低い。これに対して軸対称モード (4.1) 式の場合には、 $J_0(0) = I_0(0) = 1$ であるから孔軸で圧力を測定してもかまわない。

興味深い点は、 $r \rightarrow 0$ における変位は撓みモード ($m = 1$) だけが特別な振舞をする。上式から

$$W_1(r) \rightarrow \frac{1}{2}\omega\xi_0 \quad r \rightarrow 0$$

が成り立つ。また (D.1) 式を参照すれば

$$U_1(r) \rightarrow 0 \quad V_1(r) \rightarrow \frac{1}{2}\omega\xi_0$$

であるから、撓みモードでは孔軸付近の液体粒子は軸に垂直な方向に剛体的な変位をすることがわかる (図-2(b))。これに対して $m \neq 1$ のモードでは孔軸では変位は 0 である。すなわち、孔軸で変位を測定することによって $m = 1$ のモードだけが検出される。この性質は Kitsunozaki (1980)²⁾ によるサスペンション検層の理論的背景である。よりわかりやすくいえば、孔軸上でイドロフォンで圧力を測定するときには $m = 0$ の軸対称波しか観測されず、変位あるいは変位速度を測定するときには $m = 1$ の撓みモードしか観測されない。

解 (5.14) 式と $r > a$ で積分して得られる解 y_A, y_B, y_C は $r = a$ で連続でなければならない。(5.14) 式に $r^{1/2}$ を掛けて得られる解を以下では y_D とすれば、孔壁における境界条件は

$$Ay_{1A}(a) + By_{1B}(a) + Cy_{1C}(a) = Dy_{1D}(a)$$

$$\begin{aligned}
 Ay_{2A}(a) + By_{2B}(a) + Cy_{2C}(a) &= Dy_{2D}(a) \\
 Ay_{4A}(a) + By_{4B}(a) + Cy_{4C}(a) &= 0 \\
 Ay_{6A}(a) + By_{6B}(a) + Cy_{6C}(a) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

であるから、特性方程式は

$$\Delta_m = y_{1D}(a)Y_{246}(a) - y_{2D}(a)Y_{146}(a) = 0
 \tag{5.16}$$

となる。したがって (C.2) 式の積分 $Y_{ijk}(a)$ と解 (5.14) から固有値を求めることができる。 Y_{ijk} は常に実数であるが y_D は虚数になることがある。 ξ_0^2 が正のときは Δ_m は実数であるが、 $\xi_0^2 = 0$ で Δ_m は 0 になり ξ_0^2 が負になると m が奇数のときには Δ_m が虚数になる。 $\xi_0^2 = 0$ のときの Δ_m の零点は意味のある零点ではない。このような不便さを避けるためには計算の際には変数として $y_D/(\omega\xi_0 r)^m$ を用いればよい。こうすれば見かけの零点や Δ_m が虚数になることを回避することができる。

なお、固体層と液体層が互層になっている構造に対しても、境界で解を接続することによって積分を行うことができる。考え方は軸対称のときと同じなので付録 D にまわしてある。

非軸対称孔井波の分散曲線 孔井に液体が入っている場合の $m = 0 \sim 5$ の基本モードの分散曲線を図-8, 9 に示す。図-8 は固体が一様な Model-2 の場合である。非軸対称モード ($m \neq 0$) では位相速度は遮断周波数で孔壁の S 波速度で、高周波に向かってストンレー波の速度に収束している。軸対称モードの振幅応答は急激に一定値に収束する。非軸対称モードでは、群速度極小の周波数付近で極大値をとり、その後軸対称モードの値に漸近

する。振幅比 ε_m は比較的速くストンレー波の値に収束するが、 δ_m は m が大きくなるほど収束が遅くなる。したがって、高周波では横波成分がいつまでも残ることになる。

図-9 は内層に低速度層がある Model-3 場合に対する基本モードの分散曲線である。平均的な速度が図-8 に比べて低くなっているため、非軸対称モードの遮断段周波数が低くなっている。また振幅応答は図-8 に比べて約 1 桁大きくなっている。分散曲線、振幅応答の全体的な形は定性的には図-8 と同様である。

図-10, 11 は撓みモード ($m = 1$) の高次モードの分散曲線である。図-10 は図-8 同様地層が一様な場合、図-11 は図-9 同様孔壁に低速度層がある場合である。図-10 では基本モードの位相速度はストンレー波と固体の S 波の速度の間にあるが、高次モードでは液体中の音速と S 波速度の間にある。振幅応答は基本モードでは高周波では一定値に収束するが、高次モードでは極大値をもつ。

図-11 には図-9 と同じモデルに対する撓みモード ($m = 1$) の分散を示してある。基本モードは図-9 の $m = 1$ のグラフと同じである。全体の形は孔井が空洞の場合の図-7 によく似ている。高次モードの位相速度は遮断周波数では基本モードと同様、外層の S 波速度であるが、高周波では基本モードはストンレー波の、高次モードでは内層の S 波速度に収束する。1 次と 2 次、4 次と 5 次の位相速度が非常に接近しており、そこで群速度が急激に低下する。図-11(b) は (5.19) 式で定義された振幅応答であるが、基本モードの振幅は高次モードより 1 桁以上大きい。

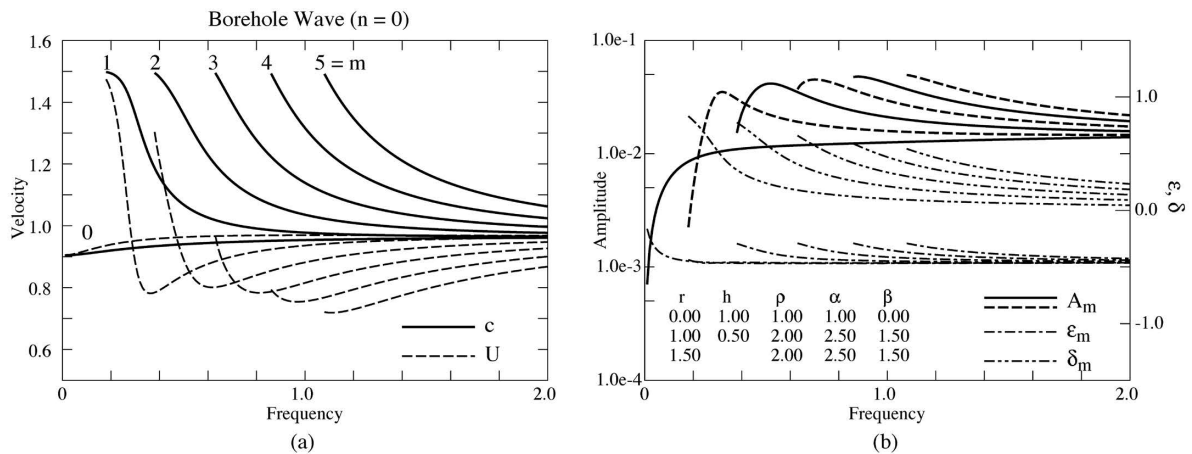


図-8 一様な地層中の非軸対称孔井波の基本モードの分散。構造は Model-2。

Fig. 8 Dispersion of fundamental modes of non-axisymmetric borehole wave in a uniform formation (Model-2).

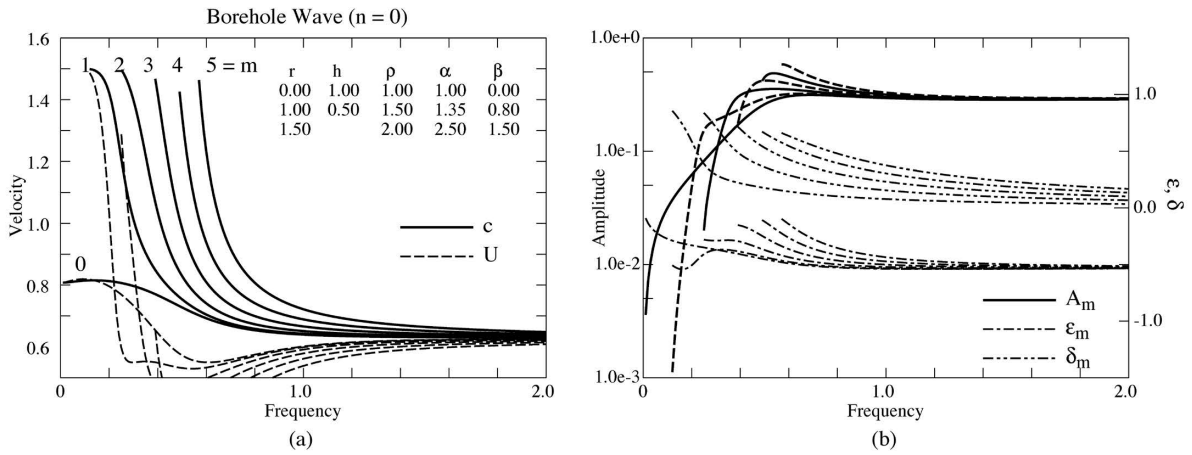


図-9 孔井の周囲に低速度層がある場合の非軸対称孔井波の基本モードの分散。構造は Model-3。
Fig. 9 Dispersion of non-axisymmetric waves along a fluid-filled borehole in a 2-layered formation (Model-3).

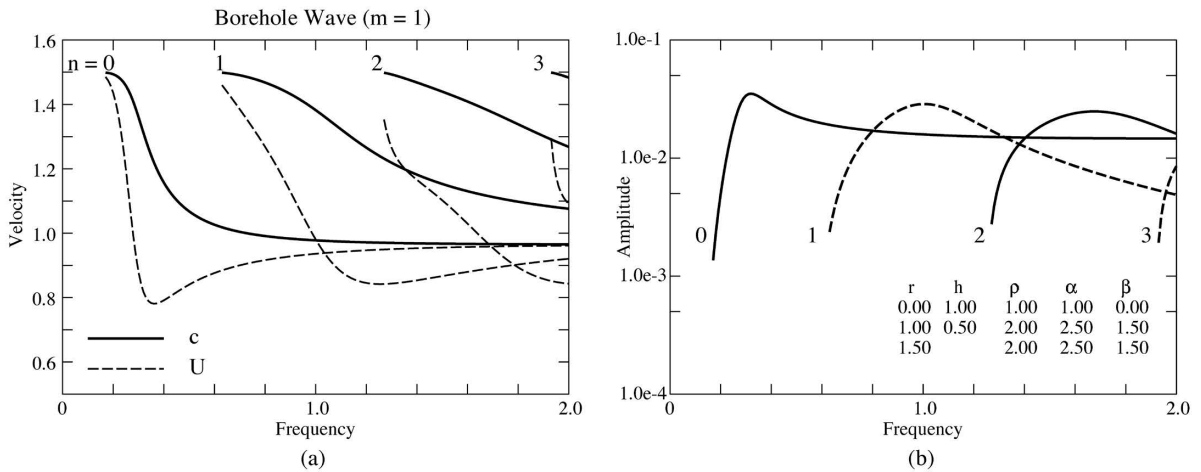


図-10 一様な地層中の孔井内を伝わる撓み波の分散曲線。構造は Model-2。
Fig. 10 Dispersion of flexural waves along a fluid-filled borehole in a homogeneous formation (Model-2).

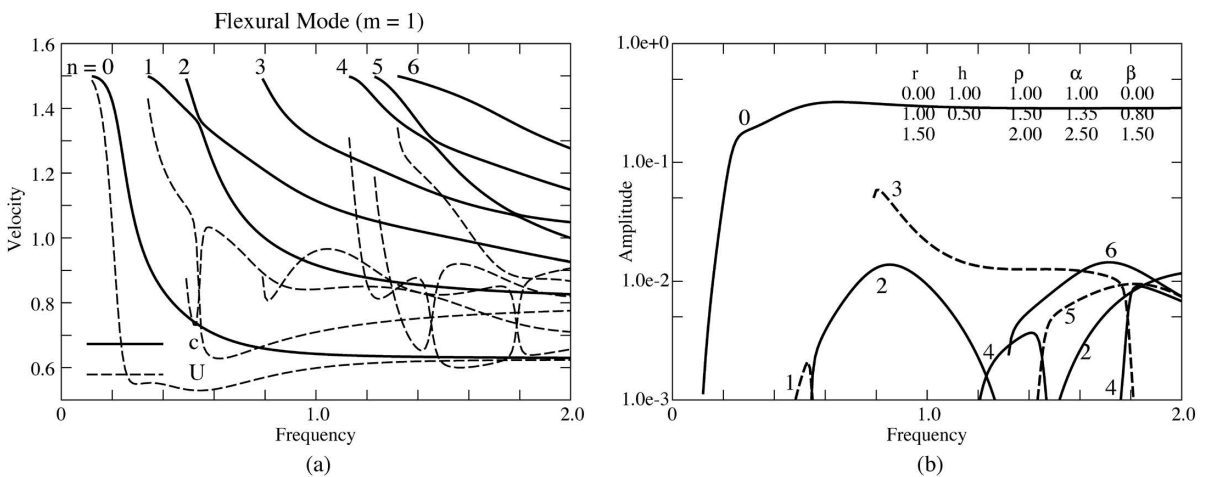


図-11 撓みモード ($m = 1$) の分散曲線と振幅応答。構造は Model-3。
Fig. 11 Dispersion of fundamental and higher modes of flexural wave in a 2-layered formation (Model-3).

5.4 サスペンション検層のモデル

ここで一つ具体的な例題を示しておく。サスペンション検層においては、水流を孔壁に吹き付けることによって弾性波を発生させる²⁾。注意しなければならないのは、水流によって一方の側の孔壁に圧力が働くだけでなく、反対側の孔壁には逆向きの張力が働くことである。まさに図-2(b)に示した撓み型の外力が働くことになる。孔壁に働くこのような外力を最も単純にモデル化すれば

$$\sigma_{rr}(a, \varphi, z; \omega) = \delta(z) \cos \varphi \quad (5.17)$$

と表すことができるであろう。すなわち、外力は $z = 0$ の円周上に働いており、 $\varphi = 0$ では圧力が最大になり、 $\varphi = \pi$ では張力が最大になっている。これを (5.8) 式に代入して外力の展開係数を求めれば、0 でないのは

$$h_{\pm 1} = \frac{1}{2}$$

のみであることが簡単にわかる。すなわちこのような外力によっては $m = \pm 1$ の撓みモードのみが励起される。現実の振源の場合には (5.17) 式のように単純ではなく、 $m = \pm 3, \pm 5, \dots$ などの奇数次のモードも励起されるであろうが、先にも注意しておいたように、孔軸上で変位(あるいは速度)を測定するかぎり $m = \pm 1$ のモードしか観測されない。そこで以下では簡単のために $m = 1$ の項のみを考えることにする。

孔壁に外力 σ_{rr} のみが働いたときの境界条件は (5.15) 式の第二式が

$$Ay_{2A}(a) + By_{2B}(a) + Cy_{2C}(a) = Dy_{1D}(a) + a^{1/2}h_1$$

となるだけで、残りの三つの式は変わらない。これらの式を D について解き、(5.14) 式の $y_{1D}(r)$ を用いて孔井内の r 方向の成分を求めると

$$W_1(r) = Dr^{-1/2}y_{1D}(r) = \frac{y_{1D}(a)Y_{146}(a)}{\Delta_1} h_1 \frac{J'_1(\omega\xi_0 r)}{J'_1(\omega\xi_0 a)}$$

が得られる。 Δ_1 は (5.16) 式に定義されている。同様に $P_1(r)$ を求め、波数積分から留数の寄与を計算すれば

$$u_r(r, \varphi, z; \omega) \sim -i \sum_n A_1 h_1 \frac{J'_1(\omega\xi_0 r)}{J'_1(\omega\xi_0 a)} \times e^{i(k_n|z|+\varphi)} \quad r \leq a \quad (5.18)$$

$$\sigma_{rr}(r, \varphi, z; \omega) \sim i \sum_n A_1 h_1 \frac{\rho_0 \omega J_1(\omega\xi_0 r)}{\xi_0 J'_1(\omega\xi_0 a)} \times e^{i(k_n|z|+\varphi)}$$

となる。ここに、振幅応答は一般の m に対して

$$A_m(\omega, n) = - \left. \frac{y_{1D}(a)Y_{146}(a)}{\partial \Delta_m / \partial k} \right|_{k=k_n^m} \quad (5.19)$$

で定義される。 ξ_0 が虚数のときにはベッセル関数 $J_m(x)$ を第一種変形ベッセル関数 $I_m(|x|)$ で書きかえなければならない。

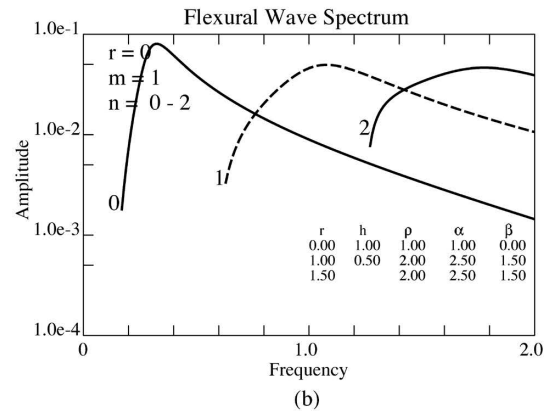
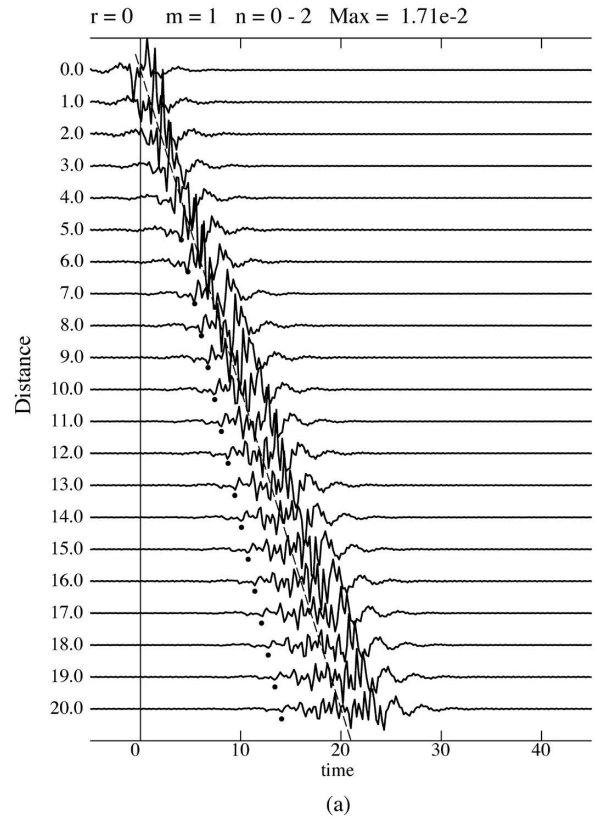


図-12 (a) Model-2 に対するサスペンション検層の変位波形。2次までの高次モードを含めている。距離は孔井の半径 a を単位、時間は a/α_0 を単位にしている。黒丸は孔壁を伝わる S 波の走時。(b) 波形の次数 n ごとの振幅スペクトル。

Fig. 12 (a) Displacement waveform generated by a suspension log tool in Model-2. Up to 2-nd higher modes are included. Dots show the arrivals of S wave along the wall. (b) Amplitude spectrum.

(5.18) 式はスペクトルであるから、これをフーリエ逆変換すれば時間軸上の波形が求められる。測定が孔軸上でおこなわれることを考えれば $r = 0$ における変位 u_r を $\varphi = 0$ で計算すれば十分である。これを示したのが図-12である。構造は地層が一様な Model-2 で、これ

に対する分散曲線は図-10に示してある。距離は a を単位に、時間は a/α_0 を単位で表している。図(b)には(5.18)式の各 n についての振幅スペクトルを示してある。これは z や φ にはよらない。基本モードの振幅スペクトルが図-10(b)の振幅応答関数と違って高周波で減衰しているのは、(5.18)式の分母に現れているベッセル関数のためである。図-10(a)からわかるように、基本モードの位相速度は $f > 0.8$ で $c < \alpha_0$ になる。このため高周波では ξ_0 は虚数になり、ベッセル関数は第一種変形ベッセル関数 $I_m(x)$ で書きかえなければならない。 $I_m(x)$ は x とともに指数関数的に増加する関数であるため、基本モードの振幅スペクトルが高周波で減衰するのである。これに対して高次モードでは ξ_0 は常に実数であるから、振幅応答と振幅スペクトルの形はあまり変わらない。振幅の大きい波群は一次、二次モードの群速度が $U \sim 0.9\alpha_0$ の帯域の波で、これは(b)の振幅スペクトルのピーク、および図-10の群速度の分散曲線から読みとることができる。その後ろに見える長周期の波は基本モードの群速度極小付近の波群である。

これらの波群の前に、振幅は小さいが明瞭な相がいくつか見える。黒丸は $z = 0$ の孔壁からS波で伝わり、臨界屈折して $r = 0$ に達する波の走時を表している。黒丸の後ろには少なくとも二つの、より振幅の大きい、同じ見かけ速度で伝わる相が見えるが、これらは孔井内で多重反射したものと考えることができる。なお、外力(5.17)式は ω によらないので、外力の時間変化は純粋なパルスと仮定していることに相当している。

6. 点振源から発生する孔井波

これまでは孔壁に加えられた応力型の振源を考えてきたが、つぎに点振源から発生する波を求める。ここでは点振源として爆発的な振源、すなわち単極子振源と、双極子、四重極子などの多重極子振源を考える。

液体中の弾性波動方程式の周波数領域における解は、ヘルムホルツ方程式

$$(\nabla^2 + k_{\alpha 0}^2)\phi = 0 \quad k_{\alpha 0} = \frac{\omega}{\alpha_0} \quad (6.1)$$

を満たす変位ポテンシャル ϕ を用いて

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \sigma_{rr} = -\rho_0 \omega^2 \phi \quad (6.2)$$

と表される。 ∇^2 は三次元のラプラシアンである。上式を満たす ϕ は無数にあるが、うまい ϕ を選ぶことによって、点振源によって生じる波動を表すことができる。

6.1 爆発的振源

変位ポテンシャルとして

$$\phi_0(R; \omega) = \frac{1}{R} e^{ik_{\alpha 0} R} \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (6.3)$$

を選んでみる。これが(6.1)式を満たしていることは ∇^2 を球座標系で表してみればわかる。この式は周波数領域

で見たものであるが、これをフーリエ逆変換して時間領域に直すと

$$\phi_0(R; t) = \frac{1}{R} \delta(t - R/\alpha_0) \quad (6.4)$$

であるから、(6.3)式の ϕ_0 は原点 $r = 0, z = 0$ から広がる球面デルタ波を表していることがわかる。しかし(6.2)式からわかるように、変位はポテンシャルの空間に関する微分、圧力は時間に関する二階微分であるから、変位や圧力などが時間、空間的にデルタ関数であるというわけではない。圧力をデルタ関数にするためには周波数領域の表現(6.2)式から、(6.3)式を $\rho_0 \omega^2$ で割ったものをポテンシャルとして用いればよい(Tsang and Rader, 1979)¹²⁾。しかしこのようにポテンシャルを選ぶと、後で見るとようにチューブ波のスペクトルが $\omega = 0$ で発散してしまうことがある。そこでここでは(6.3)式そのままを振源のポテンシャルとして用いることにする。

(6.3)式は周波数領域の解であるが、これまで用いてきた波数積分の形にはなっていない。これをゾンマーフェルト積分を用いて波数積分の形に書きかえると

$$\phi_0 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\omega \xi_0 r) e^{ik|z|} dk \quad (6.5)$$

$$\xi_0^2 = \alpha_0^{-2} - p^2 \quad \text{Im } \xi_0 > 0$$

となる(付録E)。 $H_m^{(1)}(x)$ は第一種ハンケル関数である。 ξ_0 が虚数のときには

$$H_m^{(1)}(ix) = \frac{2}{\pi i^{m+1}} K_m(x)$$

によって第二種変形ベッセル関数を用いなければならない。

ポテンシャル ϕ_0 による変位と応力は(6.5)式を(6.2)式に代入した

$$u_r = \frac{\partial \phi_0}{\partial r} = -\frac{i}{2} \int \omega \xi_0 H_1^{(1)}(\omega \xi_0 r) e^{ik|z|} dk$$

$$\sigma_{rr} = -\rho_0 \omega^2 \phi_0 \quad (6.6)$$

$$= -\frac{i}{2} \int \rho_0 \omega^2 H_0^{(1)}(\omega \xi_0 r) e^{ik|z|} dk$$

で表される。上式から $(i/2) \int e^{ik|z|} dk$ の部分を除いた部分がこれまでの W_0, P_0 に相当するものであるから、振源に相当するベクトル \mathbf{y}_0 を

$$y_{10}(r) = -\omega \xi_0 H_1^{(1)}(\omega \xi_0 r) r^{1/2}$$

$$y_{20}(r) = -\rho_0 \omega^2 H_0^{(1)}(\omega \xi_0 r) r^{1/2} \quad (6.7)$$

によって定義する。孔井内には振源項による直接波のほかに孔壁で反射された波が存在するが、これは(4.1)式の \mathbf{y}_D で表される。したがって孔壁 $r = a$ における境界条件は(4.2)式のかわりに

$$Ay_{1A} + By_{1B} = Dy_{1D} + y_{10}$$

$$Ay_{2A} + By_{2B} = Dy_{2D} + y_{20} \quad (6.8)$$

$$Ay_{4A} + By_{4B} = 0$$

を用いなければならない。上式から D を求め、振源項成分を除いた孔壁における変位を計算すると

$$Dy_{1D}(a)a^{-1/2} = - \left[\frac{y_{1D}Y_{14}}{\Delta_0} \left(y_{20} - \frac{Y_{24}}{Y_{14}}y_{10} \right) r^{-1/2} \right]_{r=a}$$

と書くことができる。 Δ_0 は (4.3) 式で定義されている。波数積分を行うと (4.4) 式とまったく同じ形の式

$$u_r(r, z; \omega) \sim -\pi i \sum_n A_0(\omega, n) F_0(\omega, n) \times \frac{W_0(r, z; \omega)}{W_0(a, z; \omega)} e^{ik_n|z|} \quad (6.9)$$

$$\sigma_{rr}(r, z; \omega) \sim -\pi i \sum_n A_0(\omega, n) F_0(\omega, n) \times \frac{P_0(r; \omega, k_n)}{W_0(a; \omega, k_n)} e^{ik_n|z|}$$

が得られる。ただし A_0 は (4.5) 式で定義された振幅応答、 F_0 は振源にかかわる項で

$$F_0(\omega, n) = i \left[y_{20}(a) - \frac{Y_{24}(a)}{Y_{14}(a)} y_{10}(a) \right]_{k=k_n} a^{-1/2}$$

で定義されている。 $k = k_n$ のときには (4.3) 式が成り立っているから Y_{24}/Y_{14} を消去することができ、(6.7) 式の y_0 、(4.1) 式の y_D を用いると

$$F_0 = \frac{i\rho_0\omega^2}{J_1(\omega\xi_0 a)} [J_0(\omega\xi_0 a)H_1^{(1)}(\omega\xi_0 a) - J_1(\omega\xi_0 a)H_0^{(1)}(\omega\xi_0 a)]$$

と変形される。さらにウロンスキアン

$$J_1(x)H_0^{(1)}(x) - J_0(x)H_1^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x}$$

の関係を用いると

$$F_0(\omega, n) = \frac{2}{\pi} \frac{\rho_0\omega^2}{(\omega\xi_0 a)J_1(\omega\xi_0 a)} \Big|_{k=k_n} \quad (6.10)$$

と簡単な形になる。 F_0 は ξ_0 が虚数のときでも実数である。(6.10) 式を用いて (6.9) 式の $P_0(r)$ 、 $W_0(r)$ として (4.1) 式を用いると、孔井内の応力は

$$\sigma_{rr}(r, z; \omega) \sim -2i \sum_{n=0}^{\infty} A_0(\omega, n) \times \frac{\rho_0^2\omega^4 a J_0(\omega\xi_0 r)}{[(\omega\xi_0 a)J_1(\omega\xi_0 a)]^2} e^{ik_n|z|} \quad r \leq a \quad (6.11)$$

と表されることになる。

$\omega \rightarrow 0$ の極限で上式の最後の項は

$$\frac{\rho_0^2\omega^4 a J_0(\omega\xi_0 r)}{[(\omega\xi_0 a)J_1(\omega\xi_0 a)]^2} \rightarrow \frac{4\rho_0^2}{\xi_0^4 a^3} \quad \omega\xi_0 a \rightarrow 0$$

に収束する。したがって振幅応答 A_0 が $\omega = 0$ で正則なら (6.11) 式の逆変換は $t \rightarrow \infty$ で発散しない。実際には

図-8, 図-9 の A_0 は $\omega \rightarrow 0$ で ω のオーダーで 0 に収束しているので問題はない。しかし Tsang and Rader (1979)¹²⁾ のように (6.7) 式を ω^2 で割ることにすれば、時間軸上の安定性を確保するためには $\omega \rightarrow 0$ で十分速く 0 に収束する波形のスペクトル $S(\omega)$ を掛けておかなければならない。

この項のもう一つの特異性に $1/\xi_0^4$ がある。しかしこれは見かけ上のものである。(4.5) 式で定義された振幅応答 A_0 は $k = k_n$ で計算されるが、このときには (4.3) 式が成り立っているから

$$A_0 = \frac{y_{1D}^2}{y_{2D}} Y_{24} \left[\frac{\partial \Delta_0}{\partial k} \right]_{k=k_n}^{-1}$$

と書きかえることができる。 y_{1D}^2 は (4.1) 式により $O(\xi_0^4)$ であるから、 $\xi_0 \rightarrow 0$ で (6.11) 式の A_0 の零点と残りの項の分母の零点が打ち消しあつて $\xi_0 = 0$ は (6.11) 式の特異点ではなくなる。

チューブ波-ストーンレー波のブランチでは位相速度が $c < \alpha_0$ であるから ξ_0 は虚数になる。高次モードでも高周波になると ξ_0 が虚数になる。このときには (6.11) 式に現れるベッセル関数 $J_m(z)$ を第一種変形ベッセル関数 $I_m(|z|)$ で置きかえなければならない。この置きかえすると $\omega \rightarrow \infty$ で (6.11) 式の最後の因数は

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi\rho_0\omega^3}{\xi_0} e^{-2\omega\xi_0 a} & r = 0 \\ \frac{\rho_0\omega^4\sqrt{2\pi}}{(\omega\xi_0)^{3/2}\sqrt{r}} e^{-\omega\xi_0(2a-r)} & r \neq 0 \end{cases}$$

のオーダーで減少する。このため、とくに $r = 0$ では、振幅スペクトルは高周波では急激に減少する。

圧力波形の計算 図-13, 14 は爆発的振源から発生した圧力波形、すなわち (6.11) 式を時間軸上に逆変換したものである。したがって振源からの直接波 (6.6) 式は含まれていない。構造は Model-3、すなわち孔壁に低速度層がある場合である。この構造に対する分散曲線は図-5 に示してある。観測は孔軸 $r = 0$ に沿っており、距離の単位は孔半径 a 、時間の単位は a/α_0 である。理解しやすくするために (6.11) 式の各 n について別々に逆変換を行った。

図-13 は基本モードのみを逆変換したものである。図 (b) には上の波形の振幅スペクトルを示している。これは (6.11) 式から明らかのように、振源からの距離 $|z|$ にはよらない。波形の変化は分散の項 $e^{ik_n|z|}$ によって生じている。基本モードの振幅応答は図-5(b) に示されているが、高周波では平坦である。これに対して基本モードの波形のスペクトルは低周波のみの狭帯域になっているのは、すぐ上に述べた変形ベッセル関数のためである。このために波形にはチューブ波から始まる群速度極小までの正分散の部分が見えている。なお、波形に添えてある破線は速度 α_0 の走時である。

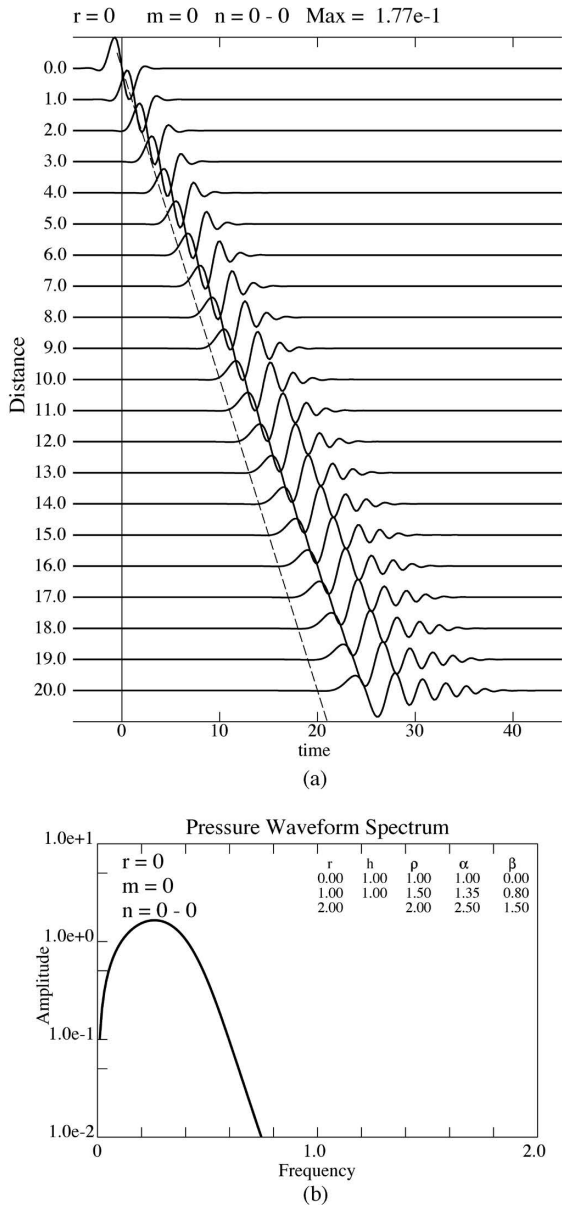


図-13 (a) Model-3 の孔井を伝わる単極子から発生した孔井波。基本モードだけを示してある。破線は速度 α_0 の走時。(b) 波形の振幅スペクトル。

Fig. 13 (a) Pressure waveform generated by an explosive source in Model-3. Only the fundamental mode component is shown. The broken line shows the arrival of sound wave velocity α_0 . (b) Amplitude spectrum.

図-14 はこれに対して1次モードについての結果である。ここで注目すべき点は、図-5(b)では一次モードの振幅応答が低周波では図に入らないくらいに小さいのに対して、図-14(b)のスペクトルは、スケールを見ればわかるように、基本モードよりも1桁以上大きくなっていることである。これは低周波では ξ_0 が実数であるために (6.11) 式の分母のベッセル関数がきいているからである。 ξ_0 が虚数になる高周波側での減衰は基本モードの場合と同様である。結果としてはスペクトルの帯域が広くなり、波形は群速度の逆分散を示している。振源とし

て (6.5) 式を考えるかぎり、高次モードになるにつれて波形のスペクトルのピーク値は上昇する。

全波形は図-13, 14 のような波形をすべての n について加え合わせたものである。しかし単極子振源の場合には、高次モードほど振幅が大きくなるので、そのような計算は実際上不可能である。これは振源 (6.4) 式に対応する圧力波形がデルタ関数の二階微分であることから明らかである。

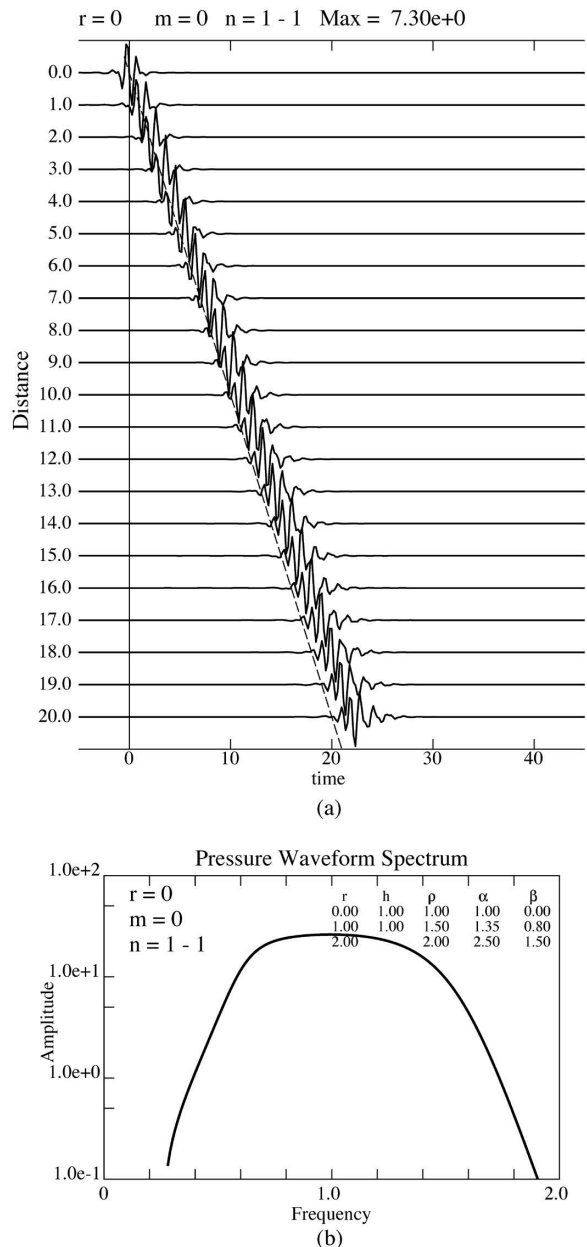


図-14 Model-3 の孔井を伝わる単極子から発生した孔井波。一次モードだけを示してある。

Fig. 14 Same as Fig. 11. The first higher mode is shown.

Tsang and Rader (1979)¹²⁾ は振源からの圧力波がある波形 $s(t)$ になるように振源を指定している。こうするためには、(6.5) 式を $\rho_0 \omega^2$ で割り、 $s(t)$ のフーリエ変換 $S(\omega)$ を掛けたものを振源として用いればよい。し

かしかれらのように $s(t)$ として減衰振動の波形を用いると、スペクトル $S(\omega)$ は $\omega = 0$ で 0 にならないから波形は発散してしまう。

$$s(t) = \frac{\omega_0}{4\sqrt{\pi}} [1 - (\omega_0 t)^2 / 2] e^{-(\omega_0 t/2)^2}$$

ω_0 は中心角周波数である。 $S(\omega)$ は低周波では ω^2 のオーダーで 0 に近づくから、(6.11) 式を $\rho_0 \omega^2$ で割って $S(\omega)$ を掛けてもスペクトルが発散することはない。

図-15 は中心周波数を $f_0 = 0.8$ としたときの理論波形である。計算には 2 次までの高次モードを含めてある。なおこの図には直接波は含まれていないが、距離 $|z| = 20$ における直接波の振幅は 2.2×10^{-2} となり、これはこの図の $z = 0$ における波の振幅 1/5 程度になる。

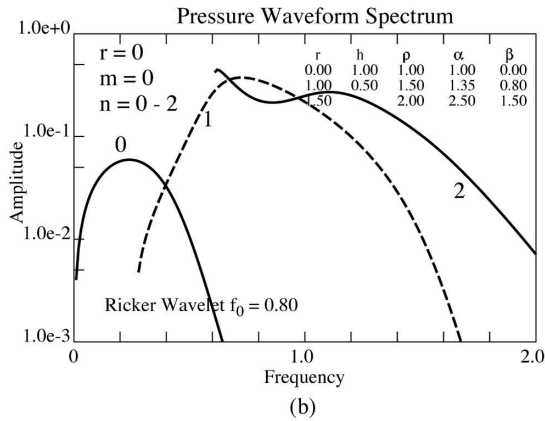
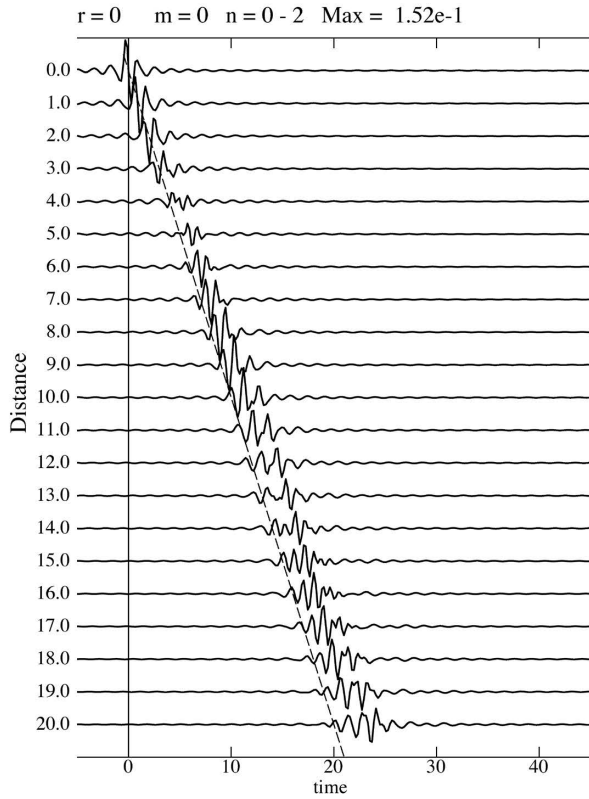


図-15 Model-3 の孔井を伝わる単極子から発生した孔井波。振源からの圧力波がリッカー波として伝わるように振源スペクトルを調整してある。0 次から 2 次までのモードを含めてある。

Fig. 15 Pressure wave form generated by an explosive source in Model-3. Up to 2-nd higher modes are included.

そこでここでは振源の圧力波形としてリッカー波形を用いた場合の波形を計算してみた。リッカー波形は次式で定義される。

$$S(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 e^{-(\omega/\omega_0)^2} \quad (6.12)$$

6.2 多重極振源

符合の異なる二つの点振源 (6.3) を x 軸上に並べ、その間の距離を 0 にした極限は双極子型の点振源になる。これに相当したポテンシャルを求めるには (6.3) 式を振源の座標について x 方向に微分すればよい。向きの異なる双極子を y 軸上に並べれば四重極子が得られる。一般に $2m$ 重極子のポテンシャルは

$$\phi_m = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega \xi_0)^m H_m^{(1)}(\omega \xi_0 r) \times e^{i(k|z|+m\varphi)} dk \quad (6.13)$$

と表すことができる (付録 F)。このポテンシャルに対する $W_m(r)$ と $P_m(r)$ は (6.2) 式から

$$W_m = (\omega \xi_0)^m \frac{d}{dr} H_m^{(1)}(\omega \xi_0 r) \quad (6.14)$$

$$P_m = -\rho_0 \omega^2 (\omega \xi_0)^m H_m^{(1)}(\omega \xi_0 r)$$

である。これに $r^{1/2}$ を掛けて得られるベクトルを \mathbf{y}_m とする。

多重極子から発生する波の計算は単極子のときと同様に行うことができる。孔内には振源項 \mathbf{y}_m のほかに反射波に相当する \mathbf{y}_D が存在するから、境界条件 (5.15) 式の第一、二式には上の振源に相当する解ベクトル \mathbf{y}_m の成分が加わり、これを D について解くと

$$D = \frac{1}{\Delta_m} (y_{2m} Y_{146} - y_{1m} Y_{246})$$

が得られる。 Δ_m は (5.16) 式で定義されているものと同じである。孔壁における解のうち、振源項以外の部分は \mathbf{y}_D で表されるから、 $u_r(a)$ に相当する部分は

$$D y_{1D}(a) a^{-1/2} = \frac{y_{1D}(a) Y_{146}(a)}{\Delta_m} \left[y_{2m}(a) - \frac{Y_{246}(a)}{Y_{146}(a)} y_{1m}(a) \right] a^{-1/2}$$

となる。これを用いて $u_r(a)$ の留数成分を計算すると

$$u_r(a, \varphi, z; \omega) \sim -i\pi \sum_n A_m(\omega, n) \times F_m(\omega, n) e^{i(k_n |z| + m\varphi)} \quad (6.15)$$

となる。ここに

$$A_m(\omega, n) = -\frac{y_{1D}(a)Y_{146}(a)}{\partial\Delta_m/\partial k} \Big|_{k=k_n^m} \quad (6.16)$$

である。また外力項 F_m は

$$F_m(\omega, n) = i \left(y_{2m} - \frac{Y_{246}}{Y_{146}} y_{1m} \right) a^{-1/2}$$

の $r = a$, $k = k_n^m$ の値であるが、固有値 $k = k_n^m$ のときには (4.16) 式から

$$\frac{Y_{246}}{Y_{146}} = \frac{y_{2D}}{y_{1D}} = -\frac{\rho_0\omega^2 a J_m(\omega\xi_0 a)}{(\omega\xi_0 a) J'_m(\omega\xi_0 a)}$$

が成り立つので

$$F_m = \frac{i\rho_0\omega^2(\omega\xi_0)^m}{J'_m(\omega\xi_0 a)} [J_m(\omega\xi_0 a)H_m^{(1)'}(\omega\xi_0 a) - J'_m(\omega\xi_0 a)H_m^{(1)}(\omega\xi_0 a)]$$

となる。最後の中括弧の中はベッセル関数のウロンスキアンで

$$J_m(z)H_m^{(1)'}(z) - J'_m(z)H_m^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi z}$$

であるから

$$F_m = -\frac{2}{\pi} \frac{\rho_0\omega^2(\omega\xi_0)^m}{(\omega\xi_0 a) J'_m(\omega\xi_0 a)} \quad (6.17)$$

が得られた。右辺はもちろん $k = k_n^m$ で計算すべきものである。 ξ_0 が虚数のときでも上式は実数である。また、 ξ_0 が 0 のときには

$$F_m \rightarrow -\frac{2}{\pi} \rho_0\omega^2 \frac{2^m(m-1)!}{a^m} \quad \omega\xi_0 a \rightarrow 0$$

の有限の値になる。

(6.15) 式は $r = a$ における u_r を表しているが、任意の r における変位や応力を求めるためには各 n ごとの固有関数を掛ければよい。とくに孔井内の r 方向の変位 u_r と応力 σ_{rr} は次のように表される。

$$u_r(r, z, \varphi; \omega) \sim 2i\rho_0\omega^2 \sum_n A_m(\omega, n) \times \frac{(\omega\xi_0)^m(\omega\xi_0 a)J'_m(\omega\xi_0 r)}{[(\omega\xi_0 a)J'_m(\omega\xi_0 a)]^2} \times e^{i(k_n^m|z|+m\varphi)} \quad (6.18)$$

$$\sigma_{rr}(r, \varphi, z; \omega) \sim -2i\rho_0^2\omega^4 a \sum_n A_m(\omega, n) \times \frac{(\omega\xi_0)^m J_m(\omega\xi_0 r)}{[(\omega\xi_0 a)J'_m(\omega\xi_0 a)]^2} e^{i(k_n^m|z|+m\varphi)}$$

前にも注意しておいたように、 $m = 1$ の撓みモードは孔軸 $r = 0$ で剛体的な変位をする。そこで双極子振源 ($m = 1$) から発生した波、(6.18) 式の u_r を $r = 0$ でフーリエ逆変換したものを図-16 に示す。ここでは基本モードから $n = 2$ 次までの高次モードまでを取り入れてある。図-10(b) の振幅応答では高次モードは基本

モードの 1 桁以上小さいが、実際の振幅スペクトルは高次モードと基本モードはほとんど同じオーダーの量である。ただし、奇数次の高次モードのスペクトルは帯域幅が非常に狭くなっている。

図-16(a) の波形は二つの波群から成り立っている。速度の速い短周期の波群は主に 2 次モードからなり、速度の遅い長周期の波群は基本モードから起きている。

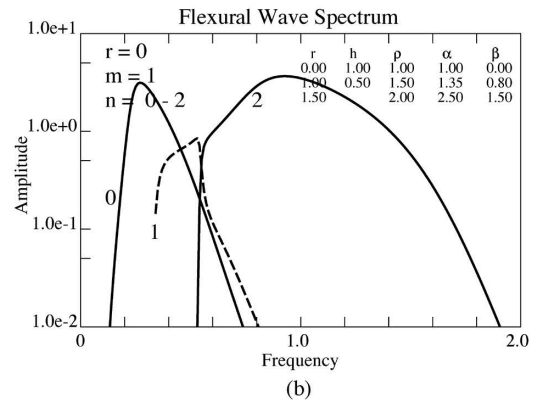
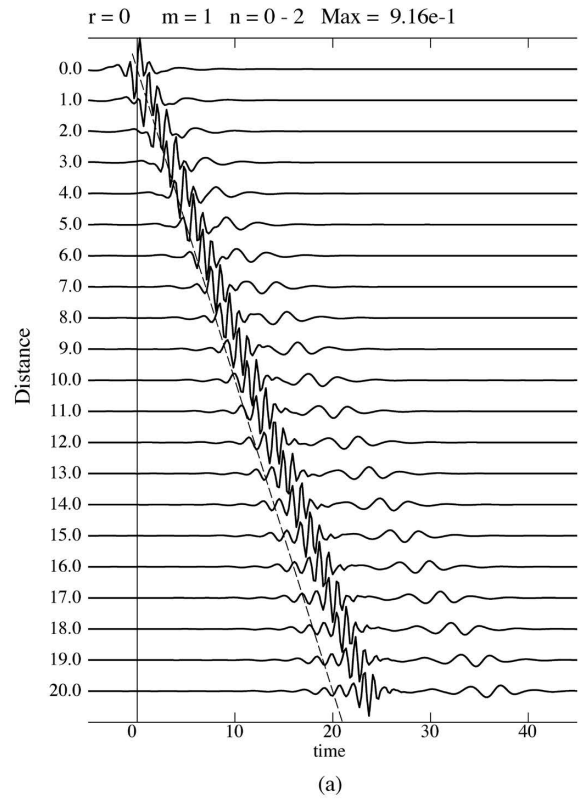


図-16 Model-3 の孔井中の双極子から発生した撓み波の変位波形。2 次までの高次モードが含まれている。

Fig. 16 Displacement of flexural mode generated by a dipole source in Model-3. Up to 2-nd higher modes are included.

7. まとめ

物性定数が円筒軸からの距離のみの関数であるとき、円筒の軸方向に定常的に伝わる表面波・境界波の定式化を行った。軸対称のときには、均質媒質のときにこれま

で知られていたように、捩れ (torsional) モードと縦波 (longitudinal) モードに分離することができる。しかし軸対称でない場合には変位の三成分は互いにカップルしており、六階の常微分方程式の固有値問題となる。この固有値問題を精度よく解くために、六階の微分方程式の三組の基本解から作られる 3×3 の小行列式 $Y_{ijk}(z)$ を未知関数とする微分方程式を導き、この微分方程式の積分を用いて分散曲線や振幅応答を表す方法を確立した。

簡単な構造に対して、円筒の内部が空の場合と液体が入っている場合の計算を行った。平面境界の場合、一般的に基本モードの位相速度は構造によって決まる表面波ないしは境界波、たとえばレーリー波、ストンレー波、などの速度の間で分散するが、円筒境界の場合には平面問題の場合と異なり基本モードにも低周波にカットオフがある。このために平面問題とは異なる振舞いをするところがある。例外は液体の入った場合の軸対称縦波モードで、よく知られているように位相速度は周波数 0 でチューブ波の速度に、高周波ではストンレー波の速度に収束する。円筒境界の場合、高次モードは固体の表層と最外層の S 波の間で分散する。振幅応答は一般に基本モードが高次モードに比べて大きい、場合によっては高次モードが基本モードと同程度のことがある。ただし観測される振幅は振幅応答に外力項と固有関数を掛けたものであるから、振幅応答だけから実際の波形の振幅を判断するのは危険である。

分散曲線は軸の周りの方位方向の波数 m によって少しずつ変化する。しかし振幅応答は、遮断周波数の違いを除けばあまり変化しない。このことは点震源のようにスペクトルが平坦な震源ではすべての m のモードが同程度の振幅で励起されてしまうことを意味している。したがって、インバージョンによって構造を求めるには、特定の m だけを励起する震源を用いるか、あるいは特定の m の波だけを計測するシステムを用いなければならない。

この点で興味深いのは撓みモード ($m = 1$) である。サスペンション検層では水流によって主に $m = 1$ のモードを励起させるが、孔軸上で圧力ではなく変位成分を測定することによって、 $m = 1$ のモードのみが観測されることになる。逆に、孔軸上で圧力を測定すれば、振源がどのようなものであれ、 $m = 0$ のモードのみが観測される。

単極子 (monopole)、双極子 (dipole) をはじめとする多重極子 (multipole) の振源を導き、単極子、双極子から発生する波の波形を計算した。固有関数に含まれるベッセル関数が周波数とともに激しく変化するため、各モードの振幅スペクトルは狭帯域になり、スペクトルのピークに対応する速度をもつ波群が別々に伝播しているような様子を示している。

ここでは軸方向に減衰することなく伝わるノーマルモードだけを考えた。ノーマルモードの重ねあわせによって S 波に関連した屈折波などを表現できることはよく知られている。しかし振幅の小さい屈折波を解析するよりも、振幅の大きい後続のノーマルモードを full wave

で観測して表面波探査のように分散曲線を求め、これをインバージョンして構造を決めるのが、これからの方向の一つかもしれない。

参考文献

- 1) Ewing, M., W. Jardetzky, and F. Press (1957) : *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill, New York.
- 2) Kitsunozaki, C. (1980) : A new method for shear-wave logging, *Geophysics*, **45**, 1489-1506.
- 3) Aki, K. and P. G. Richards (1980) : *Quantitative Seismology*, W. H. Freeman and Co., San Francisco.
- 4) Tubman, Kenneth M., C. H. Cheng, and M. Nafi Toksöz (1984) : Synthetic full waveform acoustic logs in cased boreholes, *Geophysics*, **49**, 1051-1059.
- 5) White, J. E. and R. E. Zechman (1968) : Computed response of an acoustic logging tool, *Geophysics*, **33**, 302-310.
- 6) Cheng, C. H. and M. Nafi Toksöz (1981) : Elastic wave propagation in a fluid-filled borehole and synthetic acoustic logs, *Geophysics*, **46**, 1042-1053.
- 7) Paillet, F. L. and J. E. White (1982) : Acoustic modes of propagation in the borehole and their relationship to rock properties, *Geophysics*, **47**, 1215-1228.
- 8) 福原政文・堀 宏・伊藤正栄 (2004) : 音波検層における数値計算モデリング, *物理探査*, **57**, 709-727.
- 9) 斎藤 正徳 (1993) : Lamb の問題に対する分岐線積分の寄与, *物理探査*, **46**, 372-380.
- 10) Takeuchi, H. and M. Saito (1972) : Seismic Surface Waves, *Methods in Computational Physics*, **11**, 217-295.
- 11) Saito, M. (1988) : DISPER80, A Subroutine Package for the Calculation of Seismic Normal-Mode Solutions, *Seismological Algorithms*, 293-319, Ed. D. J. Doornbos, Academic Press.
- 12) Tsang, L. and D. Rader (1979) : Numerical-evaluation of the transient acoustic waveform due to a point source in a fluid-filled borehole, *Geophysics*, **44**, 1706-1720.

付録

A. 空孔を伝わるレーリー波

付録 A では空孔を伝わるレーリー波に遮断周波数が存在すること、また、高周波では位相速度が平面問題のレーリー波の速度に漸近することを示す。

まず、後で利用するのに便利のように (3.17), (3.18) 式を書きかえておく。\$K_0(z)\$, \$K_1(z)\$ の比を

$$\delta(z) = \frac{zK_1(z)}{K_0(z)} \quad (\text{A.1})$$

と定義し

$$\delta_\alpha = \delta(\omega\hat{\xi}r) \quad \delta_\beta = \delta(\omega\hat{\eta}r) \quad (\text{A.2})$$

と置く。そうすると (3.17) 式から \$\mathbf{y}_A\$ の成分が, (3.18) 式から \$\mathbf{y}_B\$ の成分がつぎのように書き表される。

$$\begin{aligned} y_{1A} &= -\frac{1}{r}\delta_\alpha \times r^{1/2}K_0(\omega\hat{\xi}r) \\ y_{2A} &= \omega^2\mu(p^2 + \hat{\eta}^2) + \frac{2\mu}{r^2}\delta_\alpha \\ y_{4A} &= -\frac{2k\mu}{r}\delta_\alpha \\ y_{1B} &= \frac{k}{r}\delta_\beta \times r^{1/2}K_0(\omega\hat{\eta}r) \\ y_{4B} &= -\frac{2k\mu}{r^2}[(\omega\hat{\eta}r)^2 + \delta_\beta] \\ y_{2B} &= \frac{\omega^2\mu(p^2 + \hat{\eta}^2)}{r}\delta_\beta \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

\$y_{2A}\$, \$y_{4A}\$ にも \$y_{1A}\$ と同じ因数を掛けなければならないが省略してある。\$y_{2B}\$, \$y_{4B}\$ についても同様である。これから \$Y_{24}\$ を計算すると

$$\begin{aligned} Y_{24} &\sim \frac{\omega^4\mu^2}{r} [(p^2 + \hat{\eta}^2)^2\delta_\beta - 4\beta^2\hat{\eta}^2\delta_\alpha] \\ &\quad - \frac{2\rho\omega^2\mu}{r^3}\delta_\alpha\delta_\beta \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

が得られる。～となっているのは先に省略した因数からくる係数を省略しているからである。\$Y_{24}(a) = 0\$ が特性方程式である。

はじめに \$c = \beta\$ に遮断周波数が存在することを証明する。\$z \to 0\$ のとき

$$K_0(z) = O(\log z) \quad K_1(z) = O(z^{-1})$$

であるから、\$\hat{\eta} \to 0\$ のとき、すなわち \$p \to 1/\beta\$ のとき

$$\delta_\beta = O[\log \eta^{-1}]$$

となる。したがって \$\delta_\beta\$ よりも \$\hat{\eta}^2\$ の方が速く 0 に収束するから、(A.4) 式の角括弧の中の第二項は 0 になり、特性方程式は

$$\frac{\omega a}{\beta} = 2\beta\hat{\xi} \frac{K_1(\omega\hat{\xi}a)}{K_0(\omega\hat{\xi}a)} \quad (\text{A.5})$$

になる。右辺に現れる \$\hat{\xi}\$ は \$\hat{\eta} = 0\$、すなわち \$p = 1/\beta\$ における値である。ところで \$K_1(z)/K_0(z)\$ は \$z = 0\$ で無限大、\$z > 0\$ で単調減少関数であるから、\$p = 1/\beta\$ のときには特性方程式は \$\omega\$ に関してただ一つの根をもつことがわかる。これが遮断周波数である。

つぎに \$\omega \to \infty\$ における振舞いを調べる。\$z \to \infty\$ のとき

$$K_1(z)/K_0(z) \longrightarrow 1 + 1/2z \quad z \longrightarrow \infty$$

であることを用いると、\$\omega \to \infty\$ における特性方程式は、\$\omega^{-1}\$ の項まで残すと

$$\beta^4 R(p) - \left(\frac{\beta}{\omega a}\right) \left(2\beta\hat{\xi} - \frac{1}{2\beta\hat{\eta}}\right) = 0$$

になる。\$R(p)\$ はレーリー関数

$$R(p) = (p^2 + \hat{\eta}^2)^2 - 4p^2\hat{\xi}\hat{\eta}$$

で、\$R(p) = 0\$ の根が平面境界の場合のレーリー波の位相速度に相当する \$p_R\$ である。

\$\omega \to \infty\$ で特性方程式の根がレーリー波の根に漸近することは上式から明らかであるが、もう少し詳しく調べるために、\$\omega \to \infty\$ におけるレーリー波の波線パラメータを \$p_R + \Delta p\$ とすれば、\$\omega \to \infty\$ で

$$\beta^4 R'(p_R)\Delta p \simeq \left(\frac{\beta}{\omega a}\right) \left(\frac{1}{2\beta\hat{\eta}} - 2\beta\hat{\xi}\right) \quad (\text{A.6})$$

になる。右辺は \$p = p_R\$ で計算しなければならない。よって空孔中のレーリー波の位相速度は \$\omega^{-1}\$ のオーダーで平面境界のレーリー波の速度に収束する。なお、\$\lambda = \mu\$ のとき上式を計算すると

$$\frac{\Delta p}{p_R} < 0$$

となるから、\$\omega \to \infty\$ で位相速度は上からレーリー波の速度に近づく。

B. チューブ波とストンレー波

均質な固体中の孔井内の液体中を伝わる波の特性方程式は (4.3) 式より

$$\frac{Y_{24}(a)}{Y_{14}(a)} = \frac{y_{2D}(a)}{y_{1D}(a)}$$

で表される。\$\mathbf{y}_D\$ は (4.1) 式で与えられているので

$$\frac{y_{2D}(a)}{y_{1D}(a)} = \begin{cases} \frac{\rho_0\omega^2 a J_0(\omega\xi_0 a)}{(\omega\xi_0 a) J_1(\omega\xi_0 a)} & \xi_0^2 > 0 \\ -\frac{\rho_0\omega^2 a I_0(\omega\hat{\xi}_0 a)}{(\omega\hat{\xi}_0 a) I_1(\omega\hat{\xi}_0 a)} & \xi_0^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

である。\$Y_{24}\$ は既に計算してある。\$Y_{14}(r)\$ は (A.2) 式から

$$Y_{14} \sim \frac{\rho\omega^2}{r^2}\delta_\alpha\delta_\beta \quad (\text{B.2})$$

となる。したがって

$$\frac{Y_{24}}{Y_{14}} = \rho\omega^2 r \beta^4 \left[\frac{(p^2 + \hat{\eta}^2)^2}{\delta_\alpha} - \frac{4p^2 \hat{\eta}^2}{\delta_\beta} \right] - \frac{2\rho\beta^2}{r} \quad (\text{B.3})$$

となる。

これらの式を用いて、 $\omega \rightarrow 0$ のとき、および $\omega \rightarrow \infty$ のときの位相速度を求める。

はじめに $\omega \rightarrow 0$ のときの特性方程式の根を導く。 $|z| \rightarrow 0$ のとき

$$\frac{zJ_1(z)}{J_0(z)} \rightarrow \frac{z^2}{2} \quad |z| \rightarrow 0$$

が成り立つ。これは z^2 が負のときでも成り立つ。したがって

$$\frac{y_{2D}(a)}{y_{1D}(a)} = \frac{2\rho_0}{\xi_0^2 a} \quad \omega = 0$$

である。一方、 Y_{24} の角括弧の項は最後の項に比べて ω に関して高次であるから

$$\frac{Y_{24}(a)}{Y_{14}(a)} \rightarrow -\frac{2\rho\beta^2}{a} \quad \omega \rightarrow 0$$

となる。したがって $\omega = 0$ における特性方程式は

$$-\frac{2\rho\beta^2}{a} = \frac{2\rho_0}{\xi_0^2 a}$$

となる。これを展開すればチューブ波の位相速度の式 (4.6) 式が得られる。

放射条件を満たすには (4.6) 式から決まる速度 c は固体中の S 波速度 β よりも小さくなければならない。また、最後に導いた式から $\xi_0^2 < 0$ となる。これは $c < \alpha_0$ を意味している。すなわち孔井内の変位、圧力の r 方向の変化は、ベッセル関数ではなく第一種変形ベッセル関数で表され、圧力変化は孔軸で最大、変位は孔壁で最大になる。

$\omega \rightarrow \infty$ のときには

$$\delta_\alpha \rightarrow \omega \hat{\xi} r \quad \delta_\beta \rightarrow \omega \hat{\eta} r$$

であるから、(B.3) 式の最後の項は無視できて

$$\frac{Y_{24}(a)}{Y_{14}(a)} \rightarrow \frac{\rho\omega\beta^4}{\hat{\xi}} \left[(p^2 + \hat{\eta}^2)^2 - 4p^2 \hat{\xi} \hat{\eta} \right]$$

となる。したがって特性方程式は

$$\beta^4 \left[(p^2 + \hat{\eta}^2)^2 - 4p^2 \hat{\xi} \hat{\eta} \right] + \frac{\rho_0 \hat{\xi}}{\rho \hat{\xi}_0} = 0 \quad (\text{B.4})$$

である。これは平面境界のときのストンレー波の特性方程式にほかならない。この方程式は $c < \min(\alpha_0, \beta)$ の根を必ずもっていることが知られている。

C. 非軸対称モードの運動方程式

三次の小行列式 $Y_{ijk}(r)$, $i < j < k$ には非零成分が合計 20 個あるが、微分方程式 (5.3) の性質と放射条件によりつぎの恒等式が成り立っている。

$$\begin{aligned} Y_{123}(r) + Y_{356}(r) &= 0 \\ Y_{124}(r) + Y_{456}(r) &= 0 \\ Y_{125}(r) + Y_{345}(r) &= 0 \\ Y_{126}(r) + Y_{346}(r) &= 0 \\ Y_{134}(r) + Y_{156}(r) &= 0 \\ Y_{234}(r) + Y_{256}(r) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

したがって独立な $Y_{ijk}(r)$ は 14 個である。14 個の $Y_{ijk}(r)$ が満たすべき方程式は下記のとおりである。ただし $a_{ij}(r)$ は (5.3) 式に定義されている。

$$\begin{aligned} \frac{dY_{123}}{dr} &= a_{33}Y_{123} + a_{34}Y_{124} - a_{24}Y_{134} \\ &\quad - a_{25}Y_{135} - a_{26}Y_{136} + a_{15}Y_{235} \\ \frac{dY_{124}}{dr} &= a_{43}Y_{123} - a_{33}Y_{124} + a_{45}Y_{125} \\ &\quad + a_{23}Y_{134} - a_{25}Y_{145} - a_{26}Y_{146} \\ &\quad - a_{13}Y_{234} + a_{15}Y_{245} \\ \frac{dY_{125}}{dr} &= a_{55}Y_{125} + a_{34}Y_{126} + a_{26}Y_{134} \\ &\quad + a_{23}Y_{135} + a_{24}Y_{145} - a_{13}Y_{235} \\ \frac{dY_{126}}{dr} &= a_{45}Y_{123} + a_{65}Y_{125} - a_{55}Y_{126} \\ &\quad - a_{25}Y_{134} + a_{23}Y_{136} + a_{24}Y_{146} \\ &\quad + a_{15}Y_{234} - a_{13}Y_{236} \\ \frac{dY_{134}}{dr} &= a_{13}Y_{123} - a_{15}Y_{125} + a_{11}Y_{134} \\ &\quad + a_{45}Y_{135} + a_{12}Y_{234} \\ \frac{dY_{135}}{dr} &= (a_{11} + a_{33} + a_{55})Y_{135} + a_{34}Y_{136} \\ &\quad + a_{34}Y_{145} + a_{12}Y_{235} \\ \frac{dY_{136}}{dr} &= 2a_{15}Y_{123} + a_{65}Y_{135} \\ &\quad + (a_{11} + a_{33} - a_{55})Y_{136} \\ &\quad + a_{34}Y_{146} + a_{12}Y_{236} \\ \frac{dY_{145}}{dr} &= -2a_{13}Y_{125} + a_{43}Y_{135} \\ &\quad + (a_{11} - a_{33} + a_{55})Y_{145} \\ &\quad + a_{34}Y_{146} + a_{12}Y_{245} \\ \frac{dY_{146}}{dr} &= 2a_{15}Y_{124} - 2a_{13}Y_{126} - 2a_{45}Y_{134} \\ &\quad + a_{43}Y_{136} + a_{65}Y_{145} \\ &\quad + (a_{11} - a_{33} - a_{55})Y_{146} + a_{12}Y_{246} \\ \frac{dY_{234}}{dr} &= a_{23}Y_{123} + a_{24}Y_{124} - a_{25}Y_{125} \\ &\quad - a_{26}Y_{126} + a_{21}Y_{134} - a_{11}Y_{234} \\ &\quad + a_{45}Y_{235} \\ \frac{dY_{235}}{dr} &= -2a_{26}Y_{123} + 2a_{24}Y_{125} + a_{21}Y_{135} \\ &\quad - (a_{11} - a_{33} - a_{55})Y_{235} + a_{34}Y_{236} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned}
& + a_{34}Y_{245} \\
\frac{dY_{236}}{dr} & = 2a_{25}Y_{123} + 2a_{24}Y_{126} + a_{21}Y_{136} \\
& + a_{65}Y_{235} - (a_{11} - a_{33} + a_{55})Y_{236} \\
& + a_{34}Y_{246} \\
\frac{dY_{245}}{dr} & = -2a_{26}Y_{124} - 2a_{23}Y_{125} + a_{21}Y_{145} \\
& + a_{43}Y_{235} - (a_{11} + a_{33} - a_{55})Y_{245} \\
& + a_{43}Y_{246} \\
\frac{dY_{246}}{dr} & = 2a_{25}Y_{124} - 2a_{23}Y_{126} + a_{21}Y_{146} \\
& - 2a_{45}Y_{234} + a_{43}Y_{236} + a_{65}Y_{245} \\
& - (a_{11} + a_{33} + a_{55})Y_{246}
\end{aligned}$$

D. 固体-液体境界における非軸対称モードの接続

まず液体中の運動方程式を導く。液体中では剪断応力が恒等的に0であるから、 $y_4 = y_6 = 0$ である。(5.2)式の第四、六式から y_3, y_5 を求めると

$$y_3 = -\frac{k}{\rho\omega^2}y_2 \quad y_5 = -\frac{m}{\rho\omega^2 r}y_2 \quad (\text{D.1})$$

となる。これらを (5.2) 式の第一、二式に代入すれば

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dr} & = -\frac{1}{2r}y_1 + \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\rho\omega^2} \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right] y_2 \\
\frac{dy_2}{dr} & = -\rho\omega^2 y_1 + \frac{1}{2r}y_2
\end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

が得られる。液体中ではこの式を積分すればよい。この式は (4.7) 式に対応する。境界条件 (4.11) 式に対応するのは、こんどは

$$\begin{aligned}
Ay_{1A} + By_{1B} + Cy_{1C} & = Dy_{1f} \\
Ay_{2A} + By_{2B} + Cy_{2C} & = Dy_{2f} \\
Ay_{4A} + By_{4B} + Cy_{4C} & = 0 \\
Ay_{6A} + By_{6B} + Cy_{6C} & = 0
\end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

になる。

固体 → 液体 上式の第三、四式から B, C を求め第一、二式に代入すると

$$\begin{aligned}
Y_{146} \frac{A}{\Delta} & = Dy_{1f} \\
Y_{246} \frac{A}{\Delta} & = Dy_{2f} \\
\Delta & = y_{4B}y_{6C} - y_{4C}y_{6B}
\end{aligned}$$

が得られる。したがって液体内の積分は

$$y_{1f} = Y_{146} \quad y_{2f} = Y_{246} \quad (\text{D.4})$$

から始めればよい。

液体 → 固体 液体内の解 y_f を用いて三組の境界値を定義する。

$$\begin{array}{lll}
y_{1A} = y_{1f} & y_{1B} = 0 & y_{1C} = 0 \\
y_{2A} = y_{2f} & y_{2B} = 0 & y_{2C} = 0 \\
y_{3A} = 0 & y_{3B} = 1 & y_{3C} = 0 \\
y_{4A} = 0 & y_{4B} = 0 & y_{4C} = 0 \\
y_{5A} = 0 & y_{5B} = 0 & y_{5C} = 1 \\
y_{6A} = 0 & y_{6B} = 0 & y_{6C} = 0
\end{array}$$

これらの解が境界条件 (D.3) 式を満たしていることは明らかである。よって、固体中の積分は

$$Y_{135} = y_{1f} \quad Y_{235} = y_{2f} \quad (\text{D.5})$$

から始めればよい。ほかの Y_{ijk} は0である。

E. 点振源ポテンシャルの波数積分表示

(6.2) 式で与えられたポテンシャル $\phi_0(R; \omega)$ がゾンマーフェルド積分

$$\begin{aligned}
\phi_0 & = \int_0^\infty J_0(\nu r) \frac{e^{-\gamma|z|}}{\gamma} \nu d\nu \\
\gamma^2 & = \nu^2 - k_{\alpha 0}^2 \quad \text{Re } \gamma > 0
\end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

で表されることはよく知られている (たとえば, Aki and Richards, 1980, p.199)³⁾。 ν は r 方向の波数を意味している。積分が収束するためには $\text{Re } \gamma > 0$ でなければならない。 $\nu < k_{\alpha 0}$ では γ が虚数になるが、媒質の減衰を考慮すると $\text{Im } \gamma < 0$ でなければならない。そこで複素 ν 平面で $\text{Re } \gamma > 0$ のリーマン面を考えると、分岐線は虚軸と実軸上の $|\nu| < k_{\alpha 0}$ となり、積分路は実軸上の $0 \leq \nu < \infty$ である。ただし $\text{Im } \gamma < 0$ の条件から $0 \leq \nu \leq k_{\alpha 0}$ の部分では積分路は実軸の下側を通らなければならない (付図-E(a)の右側の積分路)。

つぎに

$$\begin{aligned}
J_0(z) & = \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(z) + H_0^{(2)}(z)] \\
H_0^{(2)}(-z) & = -H_0^{(1)}(z)
\end{aligned}$$

の関係を用いて (E.1) 式を書きかえると

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty H_0^{(1)}(\nu r) \frac{e^{-\gamma|z|}}{\gamma} \nu d\nu \quad (\text{E.2})$$

となる。積分路は左半平面では実軸のすぐ上、右半平面では実軸のすぐ下である (図-E(a))。 $\text{Re } \gamma > 0$ のリーマン面を考えているので、この積分路は図(b)のように変形することができる。ここで虚軸の左側では $\text{Im } \gamma < 0$ 、右側では $\text{Im } \gamma > 0$ である。

ここで

$$\gamma = -ik$$

と置き、積分変数を ν から k に変換する。図-E(b)の積分路に沿って ν と k の対応は下のようになる。

ν	$i\infty$	0	$k_{\alpha 0}$	0	$+i\infty$
γ	$-i\infty$	$-ik_{\alpha 0}$	0	$+ik_{\alpha 0}$	$+i\infty$
k	$+\infty$	$k_{\alpha 0}$	0	$-k_{\alpha 0}$	$-\infty$

すなわち k の積分路は実軸になる。よって

$$\phi_0 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\nu r) e^{ik|z|} dk \quad (\text{E.3})$$

が得られた。図 (b) から

$$\text{Re } \nu > 0 \quad \text{Im } \nu > 0$$

でなければならない。 $k = \omega p$ を用いて ν を書きかえ
ると

$$\nu = \omega \xi_0 \quad \text{Im } \xi_0 > 0$$

となる。

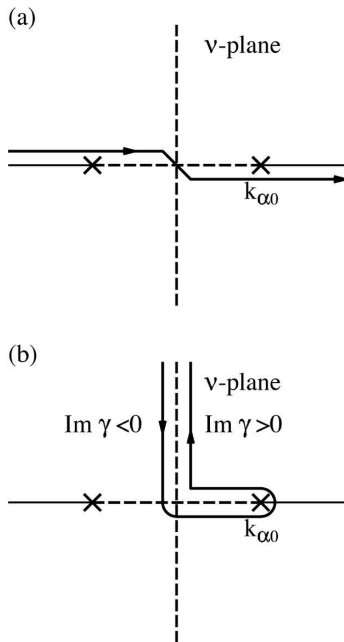


図-E (a) (E.2) 式の積分路。(b) 変形された積分路。×印は分岐点、破線は分岐線を表す。

Fig. E (a) The integration path of equation (E.2). (b) Deformed path of integration. Crosses show the branch points and broken lines show the branch cut.

F. 多重極振源のポテンシャル

x 軸上 $x = \pm l$ に強度 $\pm M$ の単極子があるときのポテンシャルは、積分等を省略して

$$\phi \sim M[H_0^{(1)}(\omega \xi_0 r_1) - H_0^{(1)}(\omega \xi_0 r_2)] \quad (\text{F.1})$$

$$r_1 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2} \quad r_2 = \sqrt{(x+l)^2 + y^2}$$

で表される。 $H_0^{(1)}$ をテーラー展開して l の一次までとると (F.1) 式の右辺は

$$\phi \sim -2Ml \frac{dH_0^{(1)}(\omega \xi_0 r)}{dr} \cos \varphi + O(Ml^2)$$

$$= 2Ml(\omega \xi_0) H_1^{(1)}(\omega \xi_0 r) \cos \varphi + O(Ml^2)$$

となる。ここで Ml を一定にたもったまま $l \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$ の極限をとり、積分を回復すれば

$$\phi_{\pm 1}(r, \varphi, z; \omega) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega \xi_0) H_1^{(1)}(\omega \xi_0 r) \times e^{i(k|z| \pm \varphi)} dk \quad (\text{F.2})$$

が得られる。これはヘルムホルツの方程式 (6.1) 式を満足している。これを一般化すれば、 m 次の対称性をもつポテンシャルは

$$\phi_m(r, \varphi, z; \omega) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega \xi_0)^m H_m^{(1)}(\omega \xi_0 r) \times e^{i(k|z| + m\varphi)} dk \quad (\text{F.3})$$

と書くことができるであろう。ヘルムホルツ方程式を満たすだけなら因数 $(\omega \xi_0)^m$ は不要であるが、多重極子としての特異性と次元に統一性をもたせるために残してある。

