

トンネル掘削に伴う壁面の変位量予測手法

土屋 浩

A TECHNIQUE FOR FORECASTING TUNNEL WALL DISPLACEMENT WHILE TUNNELLING IS IN PROGRESS

Hiroshi TSUCHIYA

Abstract

In order to carry out tunnelling safely and economically, it is necessary to estimate displacement of tunnel walls as early as possible. A number of different methods for doing this have been proposed. Research has clearly shown the displacement that occurs as tunnelling is carried out is largely determined by the distance between the tunnel face and measuring section (face-section distance). It has also been pointed out that there are cases when the effects of time elapsed following excavation must be taken into account. Attempts have also been made to express tunnel displacement as the relationship between face-section distance and elapsed time.

The author has taken the displacement that occurs from a single excavation cycle to increase exponentially with time elapsed after excavation. He further assumes that the amount of displacement decreases exponentially with face-section distance. Thus, the experimental formula expressing total displacement of the wall as a result of excavation becomes a polynomial expression. The author proposes a technique for forecasting final displacement as well as displacement at any given point in time by determining the 3 constants included in this experimental formula.

This paper describes the procedure and gives an example of the technique by which the 3 constants included in the experimental formula are determined from displacement measurements taken a number of times during excavation.

1 まえがき

トンネルの掘削に際しては、周辺地山の挙動を把握し工事の安全を確保するために、内空変位の測定をはじめとして、種々の測定が実施されている。また、変位量の大きいトンネルの場合には、変形後の壁面が、トンネルの所定の内空断面を侵す恐れがあり、それを防止するために、変位測定結果に基づいて、一次覆工の部材数量の検討がなされる。このような検討は、変位量が危険な水準に達する前になされることが必要であり、一方では、対応策の検討・決定・施工に要する時間のほかに、材料の硬化や変形に抵抗する応力の発現に要する時間が見込まれていなければならない。そのためには、測定開始後のできるだけ早い時期に、最終変位量と収束に到るまでの時間を予測することが重要課題になっている。

トンネル掘削に伴う壁面変位の出現過程については、測定時点におけるトンネル切羽と計測断面との距離（切

羽距離）の影響が大きいこと¹⁾、また、トンネル切羽の進行が停止している期間中においても、壁面変位量がわずかながら増加すること²⁾から、トンネル切羽の進行と壁面変位量との関係を求めるに当っては、切羽距離と掘削後の経過時間との両方を考慮しなければならないことが指摘されている³⁾。

この報文においては、トンネル掘削中に実施した頻度の高い内空変位測定の結果を使用することによって、トンネル切羽の進行と壁面変位量との関係を表す式を求めその性質を調べた。ここに提案する方法は取扱いが容易であり、壁面変位の予測に有用な手段となるものである。

2 トンネル掘削と壁面変位量との関係

2-1 掘削相当外力のモデル化

トンネル掘削をモデル化するに当って、有限要素法に

おける掘削相当外力の概念を援用することにする。図-1は有限要素法における掘削工程を模式的に示したものである。掘削前に、掘削要素内に生じていた内部応力を σ_0 とし、これに等価な節点力を F_1, F_2, F_3 および F_4 とする(図-1(a))。これらの等価節点力のうち、トンネル壁面上にある F_1, F_2 のみを掘削相当外力として壁面に作用させると(図-1(b))、この外力は、背面の要素内の内部応力の等価節点力を打消す方向に作用する結果、トンネル壁面の応力を解放することと等価になる。トン

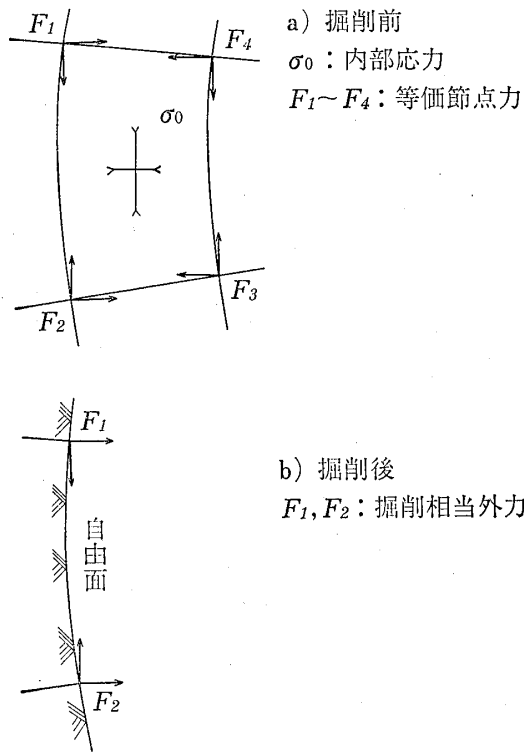


図-1 有限要素法による掘削の表現
 Fig. 1 A model of excavation used in Finite Element Method analysis

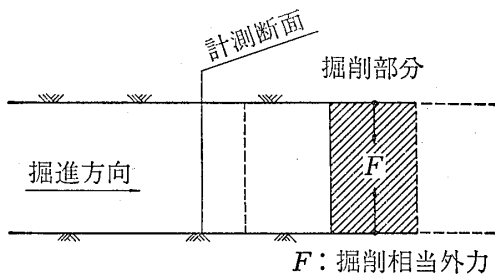


図-2 掘削相当外力の作用点の移動
 Fig. 2 Movement of a point of external force corresponding to stress supporting the tunnel wall

ネル壁面は、この掘削相当外力を受けて変形する(図-1(c))。

一般に、トンネルの掘削はトンネルの軸方向に分割して行われる。この様子を模式的に示すと図-2のようであり、1回の掘削長を一定とすると、1回の掘削に相当する掘削相当外力は常に一定であると考えることができる。しかしながら、計測断面の変形に対する作用力という観点から考えると、掘削相当外力の作用点は掘削ごとに違ざかり、これらの1回の掘削によって計測断面に生じる変位の増分は、順次低下することが予想される。

2-2 地山の変形特性のモデル化

大塚・近藤(1981)⁴⁾は、地山の変形特性を3要素フォークトモデルによって評価しているが、ここでは、2要素フォークトモデルによって評価することにした(図-3(a))。3要素フォークトモデルにおいては、掘削と同時に生じる変位量を考慮しているが、2要素フォークトモデルにおいては、この変位量を無視したことになっている(図-3(b))。

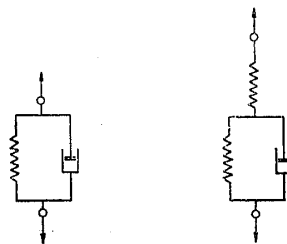
2-3 変位量の予測式

普通のトンネル掘削において、1回当りの掘削長(1間と呼ばれる)はほぼ一定している。そこで、1回当りの掘削長を P で表し、切羽距離(計測断面から切羽までの距離)を L とすれば、計測断面から k 間目まで掘削が

a) 地山の遅延弾性特性

2要素フォークトモデル

3要素フォークトモデル



b) 壁面変位量

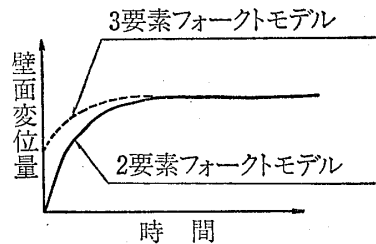


図-3 地山の変形特性のモデル
 Fig. 3 Ground deformation model

進行した状態においては、切羽距離 L は

$$L = kP \quad (1)$$

と表される (図-4)。

一方、時間の経過については、計測断面が掘削された

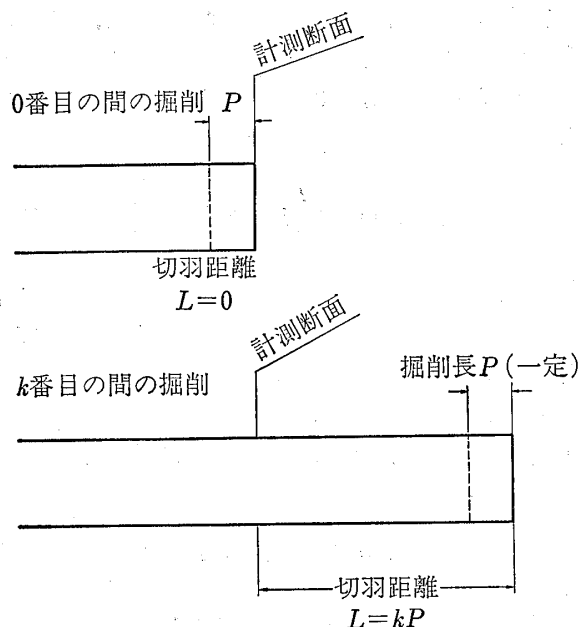


図-4 計測断面と切羽との距離

Fig. 4 Distance from tunnel face to measuring section

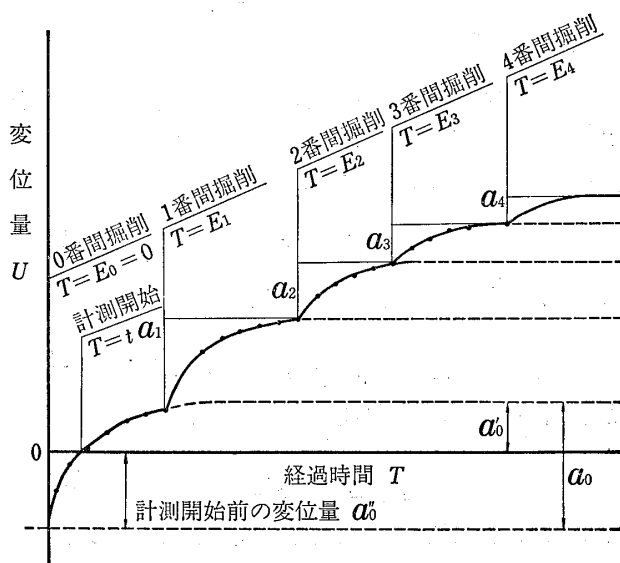


図-5 内空変位量の推移の模式図

Fig. 5 Model of pattern of displacement

時点をもととして、その後に行われる計測あるいは掘削までの経過日数をもって示すこととし、 T で表すことにする。

図-5は、一定の掘削長 P で掘削されるトンネルに設けられた計測断面の掘削に伴う内空変位量の推移を模式的に表したものである。

i 番目の間を掘削することによって計測断面に生じる変位量を u_i で表すとき、トンネル切羽が計測断面から k 番目の間にあるとき (これは計測断面の掘削後 T 日経過したときになる) の計測断面の全内空変位量 U_k は、

$$U_k = \sum_{i=0}^k u_i \quad (2)$$

と表すことができる。そこで、 i 番目の間の掘削時を E_i 、測定時を T で表すと、 i 番目の間の掘削に伴う変位量 u_i は、2要素フォークトモデルの導入によって、 $(T - E_i)$ の指数関数に従って単調増加するものとし、

$$u_i = a_i \left(1 - e^{-\frac{T-E_i}{T_0}} \right) \quad (3)$$

と表されるとする。

ここに、 a_i : i 番目の間の掘削に伴う全変位量

T_0 : 経過時間に関する定数

そして、 a_i は、図-6に示すように、計測断面までの距離 $i \cdot P$ の指数関数に従って、単調に減少するものとする。すなわち、

$$a_i = A_0 e^{-\frac{iP}{L_0}} \quad (4)$$

と表す。

ここに、 L_0 : 切羽距離に関する定数

A_0 : 変位量に関する定数

である。したがって、(2)式、(3)式および(4)式の関係から、内空変位量 U_k は、つぎのように表すことがで

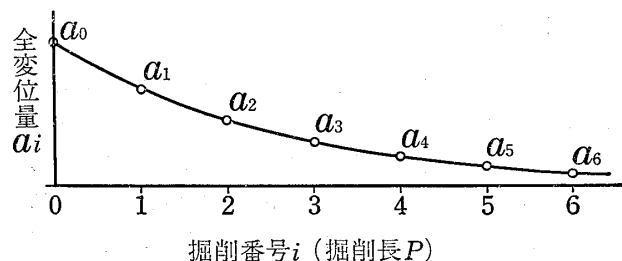


図-6 1間の掘削による全変位量の変化

Fig. 6 Total displacement resulting from a single excavation cycle

きる。

$$U_k = \sum_{i=0}^k A_0 e^{-\frac{iP}{L_0}} \left(1 - e^{-\frac{T-Ei}{T_0}} \right) \quad (5)$$

$$E_k \leq T \leq E_{k+1}$$

なお、切羽が k 番目の間にある期間中の変位増加率は、つぎのように表される。

$$\frac{\partial U_k}{\partial T} = \sum_{i=0}^k \frac{A_0}{T_0} e^{-\frac{iP}{L_0}} e^{-\frac{T-Ei}{T_0}} \quad (6)$$

$$E_k \leq T \leq E_{k+1}$$

とくに、計測断面が掘削された直後、すなわち、切羽が最初の間 ($i=0$) にある期間中の内空変位量 U_0 は、(5)式において、 $E_i=0$, $i=0$, $k=0$ であるので、

$$U_0 = A_0 \left(1 - e^{-\frac{T}{T_0}} \right) \quad (7)$$

$$0 \leq T \leq E_1$$

となる。そして、この期間中の変位増加率は、つぎのようになる。

$$\frac{\partial U_0}{\partial T} = \frac{A_0}{T_0} e^{-\frac{T}{T_0}} \quad (8)$$

$$0 \leq T \leq E_1$$

また、(5)式において、 $k=\infty$, $T=\infty$ とおくと、トンネル切羽が計測断面から十分遠方に達し、さらに、計測断面の掘削後十分な時間が経過した時点における変位量、すなわち、最終変位量 U_∞ が求められる。すなわち、

$$U_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} A_0 e^{-\frac{iP}{L_0}} \quad (9)$$

$$= \frac{A_0}{1 - e^{-\frac{P}{L_0}}}$$

となる。

2-4 解析方法

1回の掘削長 P が一定で、順次掘削されているトンネルにおいて、任意の1間の掘削直後の切羽に計測断面を設けた場合、掘削が続けられている任意の時間におけるその断面の内空変位量 U_k が、(5)式によって表されるものとした。したがって、この式を用いれば、切羽の進行に伴う内空変位量の変化を予測することができることになる。しかしながら、(5)式に含まれている経過時間に関する定数 (T_0)、変位量に関する定数 (A_0)、切羽距離に関する定数 (L_0) の3つの定数を定めることが必要

である。これらの定数は、トンネルが掘削されるそれぞれの地山に関して個有のものであるので、測定開始後のある期間内の内空変位量の実測値を用いて実験的に求めることが可能である。

(a) a_0' および T_0 を求める方法

図-5において、計測断面から数えて0番目の間の掘削時 E_0 を0とし、計測開始時を t で表すと、変位量の計測開始後の経過時間 ($T-t$) と、そのときの計測変位量 u_0' との関係は、(3)式の関係を用いることによって、

$$u_0' = a_0' \left(1 - e^{-\frac{T-t}{T_0}} \right) \quad (10)$$

のように表される。そこで、1番目の間が掘削される前に行われた十分な数量の計測値から、最小2乗法によって、 a_0' および T_0 を求めることができる。

(b) A_0 を求める方法

(4)式によれば、0番目の間の掘削に伴う全変位量 a_0 は、

$$a_0 = (a_i)_{i=0} = A_0 \quad (11)$$

となり、変位量に関する定数 (A_0) は、計測断面から数えて0番目の間の掘削に伴う全変位量 a_0 に等しいことになる。

一方、計測開始前の変位量を a_0'' とすれば、(10)式において、 $T=0$ としたときの変位量 (u_0') $_{T=0}$ の絶対値に等しくなるので、

$$a_0'' = a_0' \left(e^{\frac{t}{T_0}} - 1 \right) \quad (12)$$

と表すことができる。(12)式の a_0' および T_0 の値は、さきに述べたように、0番目の間の計測変位量から最小2乗法によって定められる。図-5に示すように、0番目の間の掘削に伴う全変位量 a_0 は

$$a_0 = a_0' + a_0'' \quad (13)$$

であり、(12)式の関係を用いると、

$$a_0 = a_0' + a_0'' = a_0' e^{\frac{t}{T_0}} \quad (14)$$

となり、(11)式の関係から

$$A_0 = a_0' e^{\frac{t}{T_0}} \quad (15)$$

と表され、変位量に関する定数 (A_0) を求めることができる。

(c) L_0 を求める方法

切羽距離に関する定数 (L_0) は、(4)式に示されてい

るように、 i 番目の間の掘削に伴う全変位量 a_i が切羽距離に従って減少する度合いを示すものである。したがって、数間にわたる a_i の値を知る必要がある。そこで、同一間（同じ切羽距離）の一連の計測変位量 u_i が(3)式に従うものとして、最小2乗法によって a_i を求める。このようにして求めた数間にわたる全変位量 a_i を用いて、(4)式に最小2乗法を適用して、切羽距離に関する定数 (L_0) を求めることができる。ただし、切羽が計測断面から数えて i 番目の間にあるときの計測変位量 u_i から、 a_i を求めるためには、0番目から ($i-1$) 番目の間の掘削に伴う変位量の増分を差引く必要がある。

3 予測値と実測値との比較

Aトンネル底設導坑における計測断面は、図-7のような形状で、その断面積は 16.54m^2 である。この断面積に等しい円形断面の半径（等価掘削半径 r_0 ）は 2.29m となる。

計測断面付近の地質は、第三紀鮮新世の泥岩で、その力学的性質の概要は、表-1に示す岩石試験結果の通りである。また、計測断面における土被り高さ H は 353m であるので、地山強度比 α は

$$\alpha = \frac{q_u}{\gamma H} = \frac{45600}{1.86 \times 35300} = 0.69$$

となっている。

Aトンネルにおける内空変位測定結果の1例を図-8に示す。図中の曲線は、切羽距離毎に計測変位量を区分し、単調増加型の指数関数で近似した結果を表したもの

表-1 Aトンネルにおける岩石の試験結果
Table 1 Tunnel A rock test results

区分	項目	平均値
物理試験	単位体積重量 γ_t	1.86 g/cm ³
	自然含水比 W	23.0 %
	液性限界 W _L	45.3 %
	塑性限界 W _P	32.2 %
	塑性指数 I _P	13.1
超音波速度測定	P波速度 V _P	1.21 km/s
	S波速度 V _S	0.44 km/s
	動弾性係数 E _d	10920 kgf/cm ²
	動ポアソン比 ν_d	0.42
一軸圧縮試験	変形係数 D	6630 kgf/cm ²
	弾性係数 E	9000 kgf/cm ²
	一軸圧縮強度 Q _u	45.6 kgf/cm ²
三軸圧縮試験	粘着力 C	9.8 kgf/cm ²
	内部摩擦角 ϕ	34 度
	粘着力 C _r	1.6 kgf/cm ²
	内部摩擦角 ϕ_r	34 度

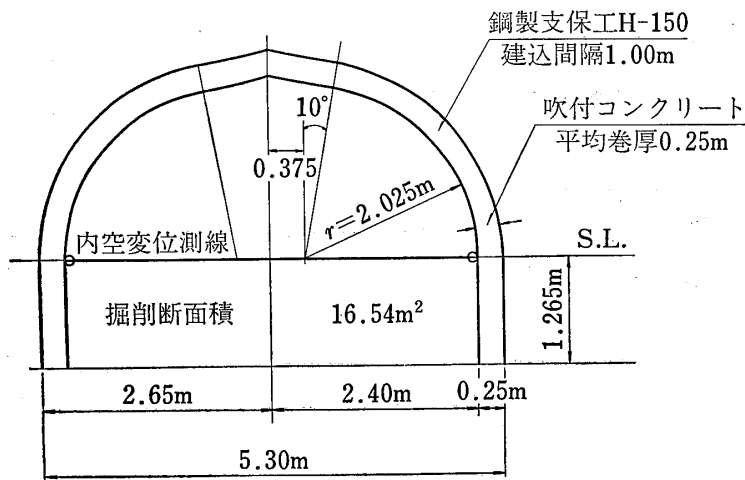


図-7 Aトンネルの計測断面
Fig. 7 Measuring section in tunnel A

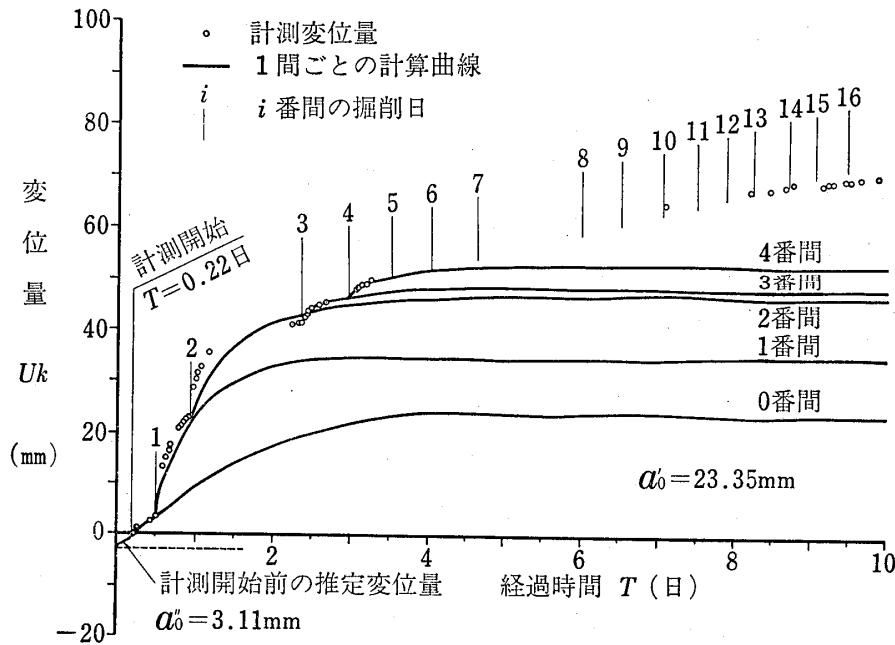


図-8 Aトンネルにおける内空変位測定結果
Fig. 8 Convergence measurement results in tunnel A

である。切羽距離毎の計測変位量は、表一2に示す通りである。そこで、計測断面から数えて0番目の間の掘削による計測変位量 u_0' を用いて、(10)式によって a_0' および T_0 を計算すると、

$$a_0' = 23.35 \text{ (mm)}$$

$$T_0 = 1.76 \text{ (日)}$$

となる。これらの値を用いて、(12)式によって計測開始前の変位量 a_0'' を推定すると、

$$a_0'' = 23.35 \left(e^{\frac{0.22}{1.76}} - 1 \right) = 3.11 \text{ (mm)}$$

となり、0番目の間の掘削に伴う全変位量 a_0 は、(14)式から、

$$a_0 = 23.35 + 3.11 = 24.46 \text{ (mm)}$$

となる。

つぎに、切羽が計測断面から数えて1番目の間にある期間中の計測変位量 u_1' から、そのときの u_{0i} の値を差引いて、1番目の間の掘削に伴う全変位量 a_1 を求める。同様にして、 a_2, a_3, a_4 の値を計算する。これらの値と、そのときに求められる T_{0i} の値は表一3に示す通りである。 i 番目の間の掘削に伴う全変位量 a_i と計測断面までの距離 $i \cdot P$ との関係を示すと、図一9のようになり、(4)式の指数関数で表すと、

表一3 1間の掘削による全変位量と経過時間に関する定数の値

Table 3 Values of constants relating to total displacement following one excavation cycle

掘削番号 i	切羽距離 L (m)	全変位置 a_i (mm)	時間定数 T_{0i} (日)
0	0.0	26.46	(1.760)
1	1.0	18.34	0.403
2	2.0	12.81	0.602
3	3.0	5.62	0.704
4	4.0	4.43	0.820

()を除いた平均値 0.632

$$A_0 = 26.59 \text{ (mm)}, \quad L_0 = 2.36 \text{ (m)}$$

が得られる。上記の A_0 および L_0 の値を用いて、(9)式によって、この計測断面における最終変位量 U_∞ を求めると、

$$U_\infty = \frac{26.59}{1 - e^{-\frac{1.0}{2.36}}} = 76.98 \text{ (mm)}$$

表-2 内空変位の計測値と予測結果
Table 2 Estimated convergence values

切羽距離	測定回	経過日数	計測変位量	To=0.29日		To=0.63日		備考	
				計算変位量	偏差	計算変位量	偏差		
L(m)	j	T(日)	Umj(mm)	Ukj(mm)	Ukj-Umj(mm)	Ukj(mm)	Ukj-Umj(mm)		
0.0	1	0.00	0.00	-14.14*		-7.84*		定 数 算 出 区 間	
	2	0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
	3	0.24	0.34	0.83	0.49	0.59	0.25		
	4	0.44	2.70	6.62	3.92	5.53	2.83		
5	0.48	3.24	7.37	4.13	6.34	3.10			
1.0	6	0.60	13.50	14.59	1.09	11.28	-2.22		
	7	0.62	15.05	15.61	0.56	12.06	-2.99		
	8	0.65	16.31	17.01	0.70	13.18	-3.13		
	9	0.66	16.85	17.44	0.59	13.54	-3.31		
	10	0.67	17.45	17.86	0.41	13.90	-3.55		
	11	0.80	20.79	22.20	1.41	18.05	-2.73		
	12	0.83	21.45	22.95	1.50	18.89	-2.56		
	13	0.85	21.85	23.41	1.56	19.43	-2.42		
	14	0.87	22.25	23.84	1.59	19.95	-2.30		
	15	0.89	22.38	24.24	1.86	20.46	-1.92		
2.0	16	0.93	23.16	24.96	1.80	21.43	-1.73		
	17	0.93	23.46	24.96	1.50	21.43	-2.03		
	18	0.97	28.90	27.06	-1.84	23.03	-5.87		
	19	1.00	30.47	28.46	-2.01	24.17	-6.30		
	20	1.02	31.71	29.31	-2.40	24.90	-6.81		
	21	1.07	33.10	31.20	-1.90	26.63	-6.47		
	22	1.18	35.76	34.37	-1.39	29.98	-5.78		
	23	2.24	40.97	41.07	0.10	44.29	3.32		
	24	2.31	41.44	41.11	-0.33	44.63	3.19		
	25	2.35	41.43	41.13	-0.30	44.81	3.38		
3.0	26	2.36	42.27	41.39	-0.88	44.97	2.70		
	27	2.37	42.44	41.64	-0.80	45.13	2.69		
	28	2.37	42.62	41.64	-0.98	45.13	2.51		
	29	2.38	42.79	41.88	-0.91	45.28	2.49		
	30	2.38	42.84	41.88	-0.96	45.28	2.44		
	31	2.43	43.82	42.96	-0.86	46.03	2.21		
	32	2.48	44.43	43.87	-0.56	46.71	2.28		
	33	2.56	45.14	45.04	-0.10	47.70	2.56		
	34	2.66	45.89	46.11	0.22	48.77	2.88		
	35	3.03	47.87	49.03	1.16	52.06	4.19		
4.0	36	3.04	48.19	49.19	1.00	52.18	3.99		
	37	3.12	48.80	50.25	1.45	53.10	4.30		
	38	3.19	49.31	50.97	1.66	53.81	4.50		
	39	3.25	49.75	51.46	1.71	54.37	4.62		
10.0	40	7.07	64.97	61.64	-3.33	67.56	2.59		予 測 区 間
12.0	41	8.19	67.72	62.44	-5.28	68.50	0.78		
13.0	42	8.46	68.12	62.55	-5.57	68.65	0.53		
14.0	43	8.66	68.86	62.60	-6.26	68.73	-0.13		
15.0	44	8.75	69.28	62.62	-6.66	68.76	-0.52		
	45	9.14	69.28	62.70	-6.58	68.88	-0.40		
	46	9.21	69.56	62.71	-6.85	68.90	-0.66		
	47	9.25	69.61	62.72	-6.89	68.91	-0.70		
16.0	48	9.43	70.03	62.74	-7.29	68.95	-1.08		
	49	9.49	69.92	62.74	-7.18	68.96	-0.96		
	50	9.64	70.55	62.75	-7.80	68.98	-1.57		
		9.86	70.88	62.75	-8.13	69.00	-1.88		

* 計測開始前の推定変位量 α_0

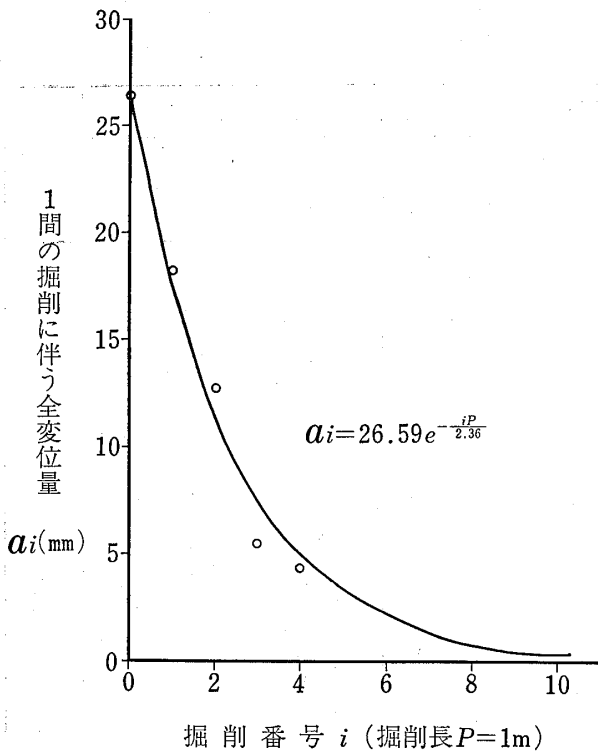


図-9 Aトンネルにおける1間の掘削による全変位量の変化
Fig. 9 Changes in total displacement in Tunnel A after one excavation cycle

となる。

また、切羽が計測断面から数えて k 番目の間にある期間中の、任意の測定日 T における変位量 U_k は、(5)式によって推定することができる。しかし、(5)式における3つの定数のうち、変位量に関する定数 A_0 および切羽距離に関する定数 L_0 については、一義的に決定することができたが、経過時間に関する定数 T_0 については、表-3に示すように、掘削番号ごとに異なった値が得られている。そこで、 T_0 の値を一義的に定める1つの方法として、計算変位量 U_k と計測変位量 U_m との差の2乗和が最小になる T_0 を求めることにした。すなわち、(5)式において、 $A_0=26.59$ (mm)、 $L_0=2.36$ (m) とし、 $T_0=0.05, 0.10, 0.15, \dots, 1.00$ の場合のそれぞれに関して、切羽距離4mまでの38個の計測変位量 u_{mj} に対応した計算変位量 U_{kj} を求めた。そして、それぞれの T_0 について、

$$V = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{j=1}^N (U_{kj} - U_{mj})^2} \quad (16)$$

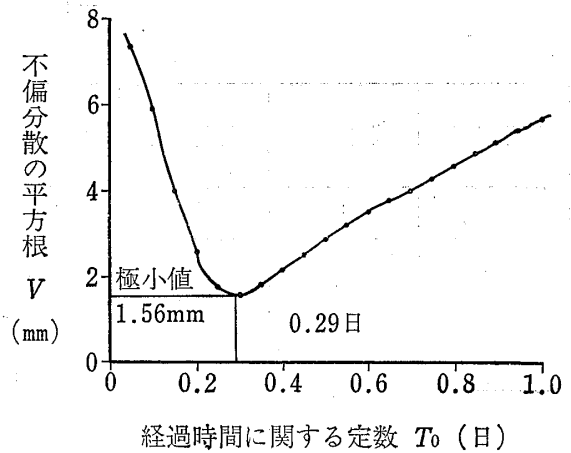


図-10 経過時間に関する定数の最適値
Fig. 10 Optimal time constants

ここに、 U_{kj} : j 番目の計算変位量
 U_{mj} : j 番目の計測変位量
 N : 測定個数

によって、計算変位量と計測変位量との偏差平方和による不偏分散の平方根を求めた。その結果は図-10に示す通りである。この図から明らかなように、不偏分散の平方根 V の極小値は1.56mmであり、そのときの T_0 の値は、0.29 (日) である。したがって、経過時間に関する定数 T_0 の最適値として0.29 (日) を採用すると、(5)式はつぎのようになる。

$$U_k = \sum_{i=0}^k 26.59 e^{-\frac{1.0 \times i}{2.36}} \left\{ 1 - e^{-\frac{T-Ei}{0.29}} \right\} \text{ (mm)} \quad (17)$$

上式中の3つの定数 A_0 、 L_0 および T_0 は、計測断面から数えて、0番目から4番目の間までの計測変位量を用いて定めたものであるが、この式を用いて変位量を計算すると、表-2に示すようになる。表-2に示す計測変位量および計算変位量を経過時間に対してプロットすると、図-11のようになる。この図において、4番目の間までの間において、計算値が計測値とよい一致を示していることは当然である。しかし、7番目の間以降の変位量を(17)式によって推定するとすれば、経過時間9.86日において、実際の変位量よりも8.13mm小さく見積ることになる。すなわち、11.5%ほど過小評価することになる。

T_0 の値として、表-3に示す掘削番号1から4までの平均値 (0.63日、掘削番号0の値は、他のものにくらべて極端に大きくとび離れているので除外する) を採用すると、図-12に示すようになる。この図においては、

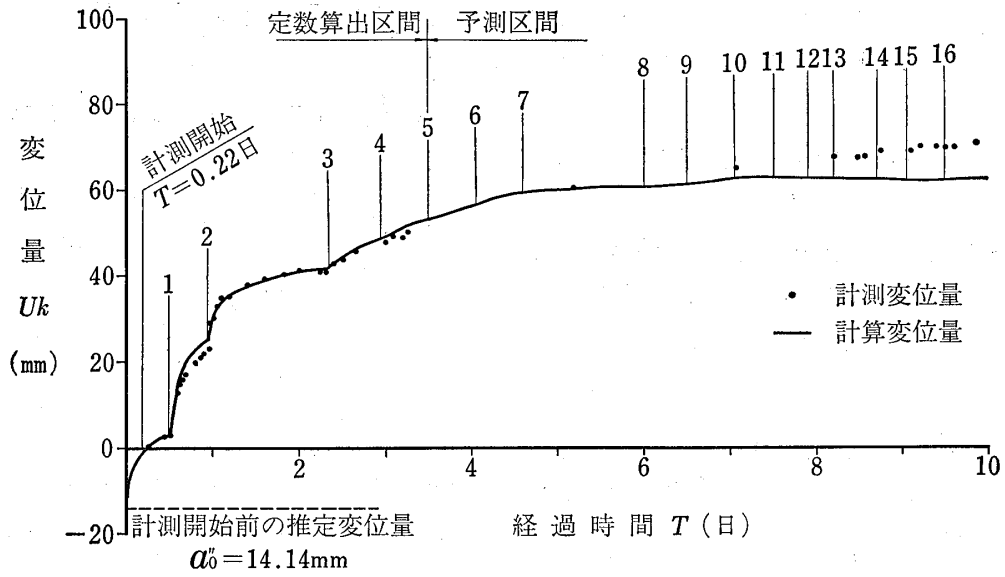


図-11 内空変位量の予測結果 ($T_0=0.29$ 日の場合)
 Fig. 11 Estimates of convergence ($T_0=0.29$ days)

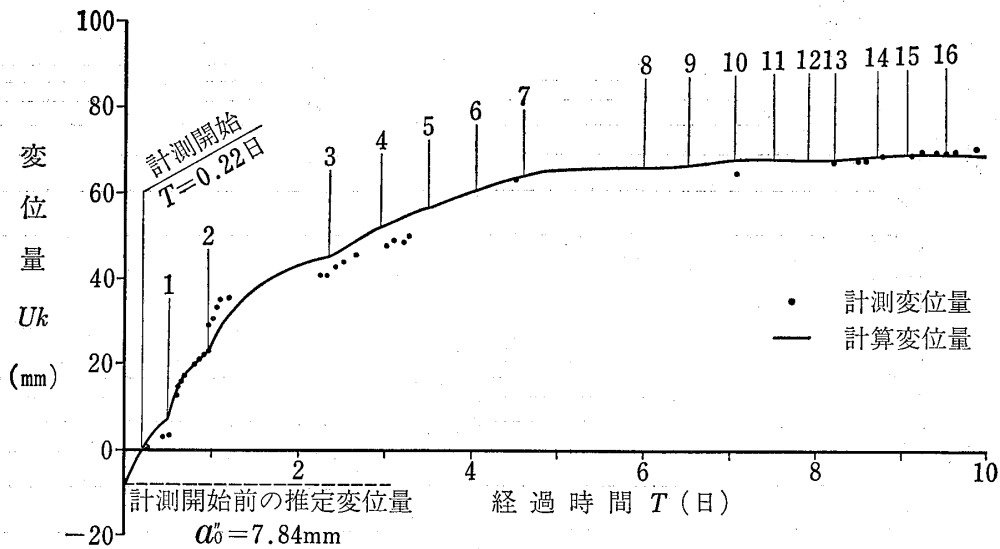


図-12 内空位置の予測結果 ($T_0=0.63$ 日の場合)
 Fig. 12 Estimates of convergence ($T_0=0.63$ days)

4番目の間までの間における計算値と計測値との間には、図-11に示す場合にくらべれば、若干のずれが見られるが、7番目の間以降の変位量の推定値は、実際の変位量とよい一致を示していることがわかる。たとえば、7.07日においては、計算値が67.56mmであるのに対し、計測値は64.97mmであり、9.86日においては、計算値が69.00mmで、計測値は70.88mmである。その差の計

測値に対する比は、それぞれ4.0%、および2.7%であって、 $T_0=0.29$ 日とした場合(図-11)にくらべて、精度がよいことがわかる。

以上のように、(5)式によって、変位量を推定しようとする場合、変位量に関する定数 A_0 および切羽距離に関する定数 L_0 は一義的に決定することができるが、経過時間に関する定数 T_0 については、計算例によっても

わかるように、それぞれの掘削ごとに異なる値が得られる。これらの値から、変位量の推定のための T_0 の最適値を求める方法については、今後の検討課題と考える。

4 掘削日の間隔が一定である場合の変位量計算式の性質

計測断面が掘削された後において、一定の日数 D の間隔で順次掘削が継続されるものとすれば、 i 番目の間の掘削日 E_i は

$$E_i = iD \quad (18)$$

であり、切羽が k 番目の間にあるときの計測断面における内空変位量 U_k は、(18)式を(5)式に代入すれば、つぎのようになる。

$$U_k = \sum_{i=0}^k A_0 e^{-\frac{iP}{L_0}} \left(1 - e^{-\frac{T-iD}{T_0}} \right) \quad (19)$$

$$= \sum_{i=0}^k A_0 \left\{ e^{-\frac{iP}{L_0}} - e^{-\frac{T}{T_0}} e^{-i\left(\frac{P}{L_0} - \frac{D}{T_0}\right)} \right\}$$

$$= A_0 \left\{ \frac{1 - e^{-\frac{(k+1)P}{L_0}}}{1 - e^{-\frac{P}{L_0}}} - e^{-\frac{T}{T_0}} \frac{1 - e^{-(k+1)\left(\frac{P}{L_0} - \frac{D}{T_0}\right)}}{1 - e^{-\left(\frac{P}{L_0} - \frac{D}{T_0}\right)}} \right\}$$

$$kD \leq T \leq (k+1)D$$

(19)式の第1項は、切羽距離に関連する項で、 k 、 P 、 L_0 によって定まる。一方、第2項は、経過時間に関連する項であるが、その係数の中には、切羽距離に関連する2つの定数が P/L_0 の形で含まれている。また、経過時間に関連する2つの定数も D/T_0 の形で含まれている。

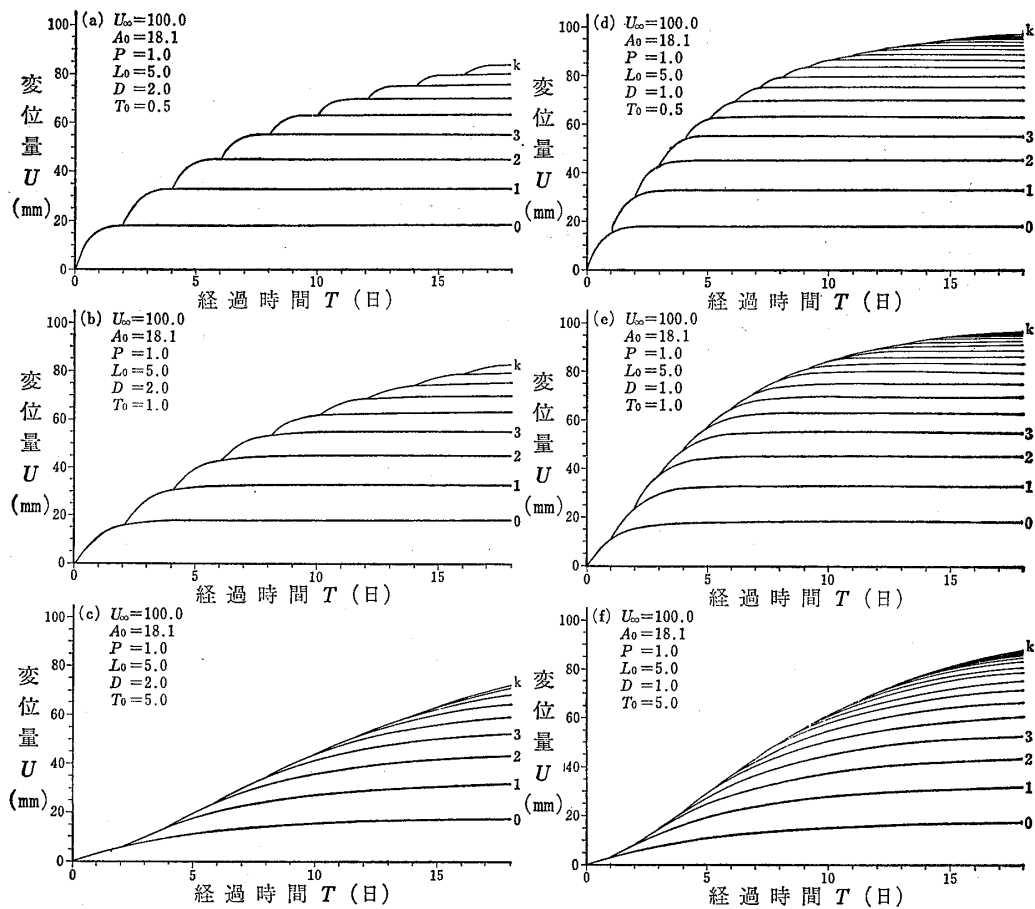


図-13 内空変位量と経過時間との関係 (経過時間に関する定数 T_0 の変化による相異)
 Fig. 13 Relationship between convergence and elapsed time (For different values of time constant T_0)

いま、掘削長 $P=1.0$ (m)、切羽距離に関する定数 $L_0=5.0$ (m)、最終変位置 $U_\infty=100$ (mm) とすれば、(17) 式の関係から、変位置に関する定数 $A_0=18.1$ (mm) が得られる。

上記の P 、 L_0 および A_0 の値を用い、経過時間に関する定数 T_0 を 0.5 日、1 日、5 日としたときの内空変位置 U_k を、(19) 式によって計算した。図-13の(a), (b), (c) は、掘削日間隔 D を 2 日とした場合であり、(d), (e), (f) は、掘削日間隔 D を 1 日とした場合である。この計算例を見ると、それぞれの間の掘削に対応する変位置が明確に識別できるのは、(a), (b), (d) の例であり、これらは $T_0 < D$ の場合に該当しており、 $T_0 = D (=1 \text{ 日})$ である (e) の例では、識別は困難であり、 $T_0 > D$ である (c), (f) の例では識別は不可能である。

また、掘削長 $P=1.0$ (m)、切羽距離に関する定数 $L_0=2.0$ (m)、最終変位置 $U_\infty=100$ (mm)、変位置に関する定数 $A_0=39.3$ (mm) を用いて、内空変位置 U_k を求めた。図-14の(a), (b), (c) は、経過時間に関する定数 T_0 を 1 日とし、掘削日間隔 D がそれぞれ 4 日、2 日、1 日の場合の例である。また、(d), (e), (f) は T_0 を 5 日とし、掘削日間隔 D がそれぞれ 5 日、2 日、0.5 日の場合の例である。この計算例によれば、 T_0 の値にかかわらず、掘削日間隔 D が小さくなるに従って、変位は早期に出現し、早い時期に最終値に近づく傾向がみられる。

つぎに、図-13および図-14に示す例において、 D および T_0 の値が同じ条件のものを抽出すると、つぎの 3 組が得られる。

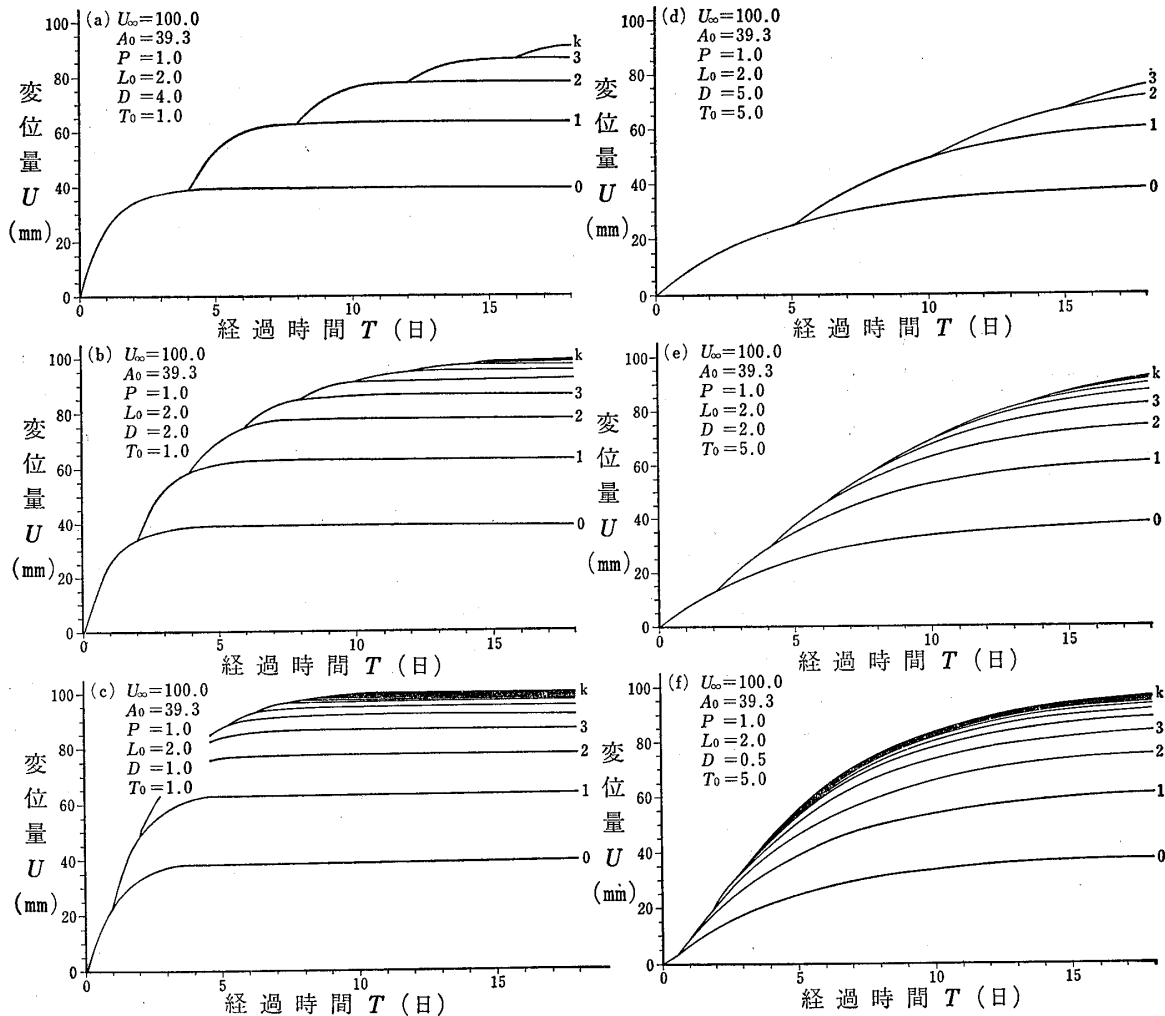


図-14 内空変位置と経過時間との関係 (掘削日間隔 D の変化による相異)

Fig. 14 Relationship between convergence and elapsed time (For different values of D , days between excavation cycles)

	D(日)	T ₀ (日)	L ₀ =5 (m)	L ₀ =2 (m)
A	1	1	図-13 (e)	図-14 (c)
B	2	1	図-13 (b)	図-14 (b)
C	2	5	図-13 (c)	図-14 (e)

これらの3組について、L₀=5 mの場合とL₀=2 mの場合の変位量の曲線を比較すると、L₀=2 m (図-14)の方が変位の出方が早く、早期に最終値に達する傾向が見られ、切羽距離に関する定数L₀が小さいほど、最終値に達する時期が早いといえる。

5 掘削日の間隔が一定である場合の変位増加率計算式の性質

(18)式を(6)式に代入すると、変位増加率 $\partial U_k / \partial T$ は、

$$\frac{\partial U_k}{\partial T} = \sum_{i=0}^k \frac{A_0}{T_0} e^{-\frac{iP}{L_0}} e^{-\frac{T-iD}{T_0}}$$

$$= \sum_{i=0}^k \frac{A_0}{T_0} e^{-\frac{T}{T_0}} e^{-i\left(\frac{P}{L_0} - \frac{D}{T_0}\right)} \quad (20)$$

$$= \frac{A_0}{T_0} \left\{ \frac{e^{-\frac{T}{T_0}} (1 - e^{-(k+1)\left(\frac{P}{L_0} - \frac{D}{T_0}\right)})}{1 - e^{-\left(\frac{P}{L_0} - \frac{D}{T_0}\right)}} \right\}$$

$$kD \leq T \leq (k+1)D$$

と表される。

そこで、図-13の場合と同様に、掘削長P=1 m、切羽距離に関する定数L₀=5 m、最終変位量U_∞=100 mm (変位量に関する定数A₀=18.1 mm)とし、さらに、経過時間に関する定数T₀を0.5日、1日、5日としたとき、掘削日間隔D=2日の場合の変位増加率を図-15の(a), (b), (c)に、また、掘削日間隔D=1日の場合の変位増加率を同図の(d), (e), (f)に示す。経過時間に関する定数T₀が小さい場合、掘削直後の変位増加率は大きい、その後の変位増加率は、急速に小さくなるのがわかる。反対にT₀が大きい場合には、掘削直後の変位増加率はそれほど大きくないが、その後長期間にわたって変

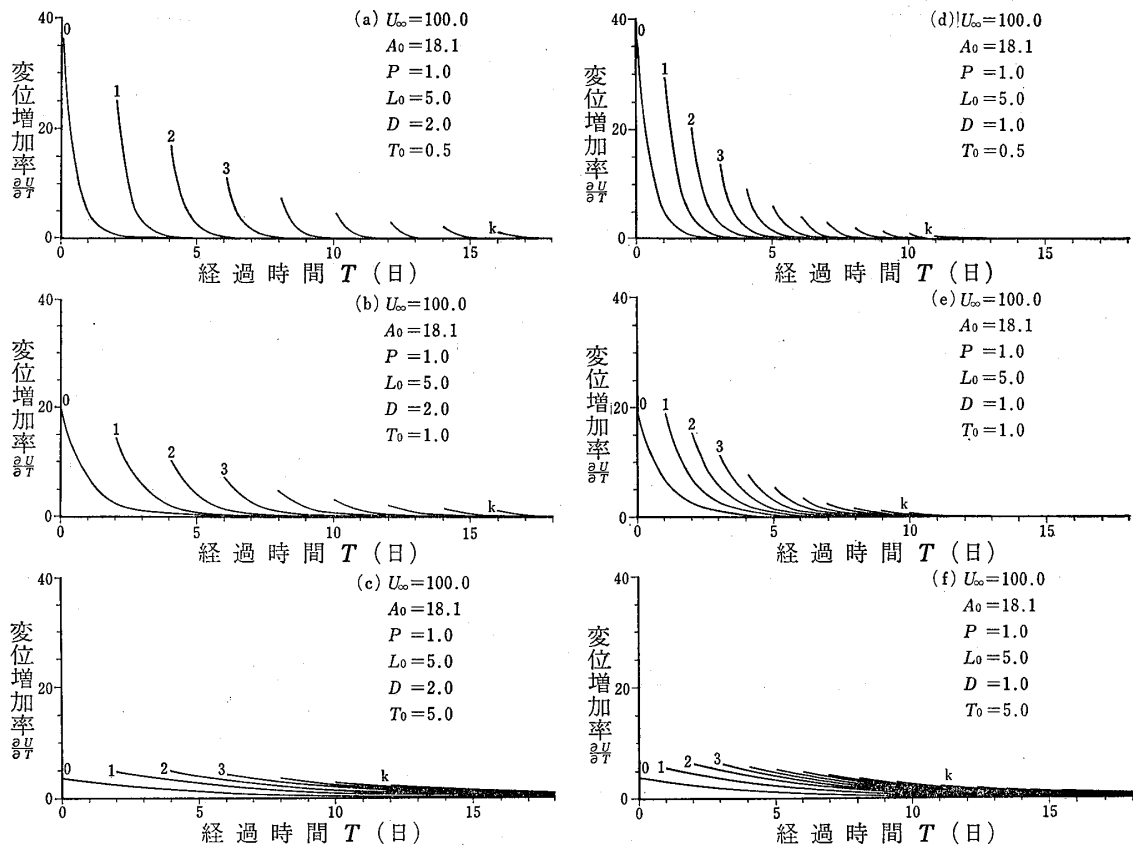


図-15 変位増加率と経過時間との関係 (経過時間に関する定数 T₀ の変化による相異)

Fig. 15 Relationship between displacement increase ratio and elapsed time (For different values of time constant T₀)

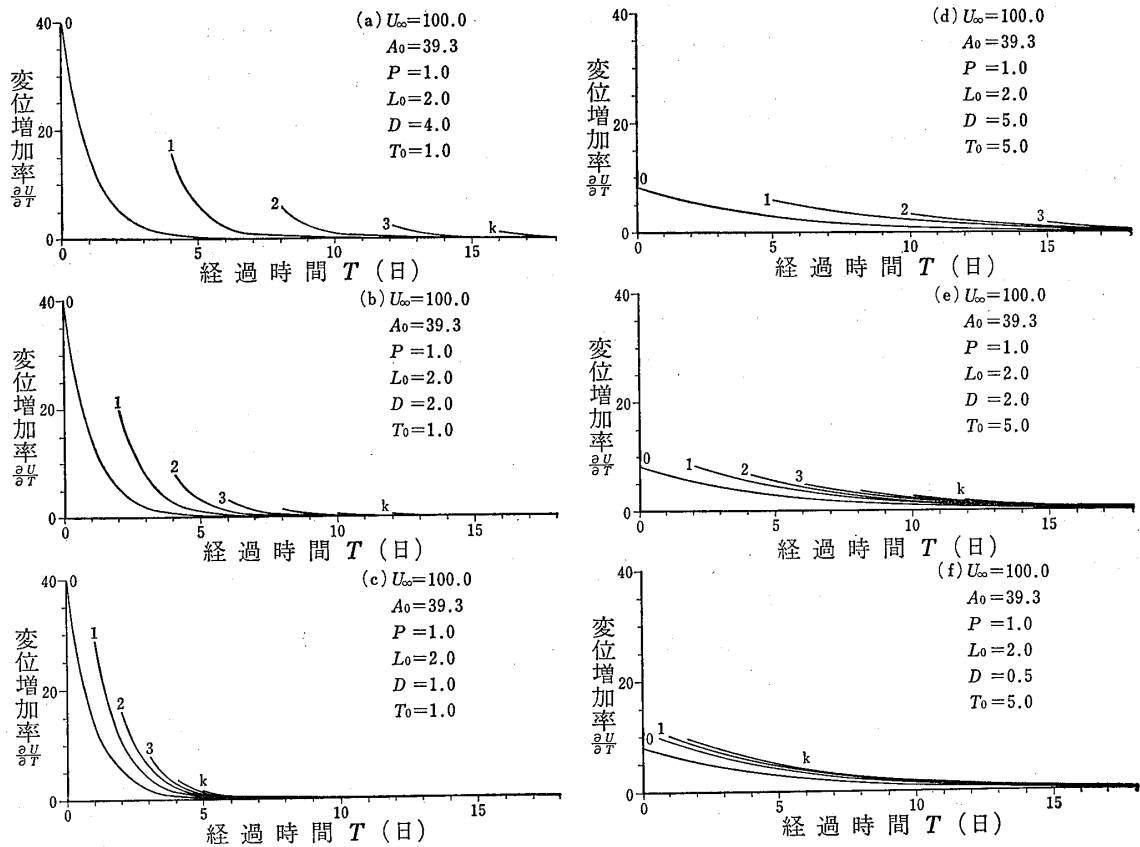


図-16 変位増加率と経過時間との関係 (掘削日数間隔Dの変化による相異)

Fig. 16 Relationship between displacement increase ratio and elapsed time (For different values of D , i. e., days between excavation cycles)

位増加率の著しい低下は見られない。

また、図-14の場合と同様に、掘削長 $P = 1$ m、切羽距離に関する定数 $L_0 = 2$ m、最終変位量 $U_\infty = 100$ mm (変位量に関する定数 $A_0 = 39.3$ mm) とし、経過時間に関する定数 $T_0 = 1$ 日に対して、掘削日数間隔 D が 4 日、2 日、1 日である場合の変位増加率をそれぞれ図-16の (a), (b), (c) に示し、 $T_0 = 5$ 日に対して、掘削日数間隔 D が 5 日、2 日、0.5 日である場合の変位増加率をそれぞれ同図の (d), (e), (f) に示す。掘削日数間隔 D が、 T_0 にくらべて十分大きい場合 (図-16(a): $D = 4$ 日、 $T_0 = 1$ 日) には、当然なことではあるが、つぎの間の掘削によって変位速度が大きくなる時点で、前の間の掘削による変位速度は、十分小さくなっている。

掘削日数間隔 D が小さい場合には、前の間の掘削による変位増加率が十分低下しないうちに、つぎの間の掘削が行われることになる。一般には、掘削直後の変位増加率の値は、掘削番号が大きくなるに従って小さくなるが、 D が T_0 にくらべて小さい場合 (図-15の (c), (f) および図-16の (e), (f)) には、見掛け上大きくなる傾向が見ら

れる。

6 あとがき

この報文に示した解析方法が適用できるのは、1回の掘削長 P を一定として掘削されるトンネルに限られる。そして、トンネルの縦断方向に対して、土被り条件や地質条件が急変するような場合、あるいは断面形状が変化するような場合には適用が困難である。

この解析方法が適用できる場合であっても、つぎのような条件を必要とするものである。

1) 掘削日数間隔 D が小さくなると、前の間の掘削による変位量が十分に発現しないうちに、つぎの間の掘削が行われることになり、1間ごとの掘削に伴う変位量を識別することが困難になる。このためには、

$$D \geq T_0$$

であることが望ましい。

2) 切羽が同一の間にある期間中の変位の測定は、で

きる限り密に行なう必要がある。変位増加率が大きい掘削直後において、測定日間隔 Δ が大き過ぎると、その測定の間に変位の大部分が生じてしまい、変位量と時間の関係の精度が低下し、とくに、経過時間に関する定数 T_0 の値を決定する際の誤差が大きくなることが考えられ、

$$\Delta \leq T_0/2$$

となるように設定している。

3) (4)式を用いて、 A_0 および L_0 を決定するに当たっては、掘削数 k が大きいほど、精度はよくなると考えられるが、

$$k \geq 4$$

と考えている。

また、経過時間に関する定数 T_0 については、それぞれの掘削ごとに異なる値が得られる。そのために、変位量予測に際して使用する T_0 の値の決定方法については、さらに検討することが必要である。

参 考 文 献

- 1) 桜井春輔, 蓮井昭則, 近藤達敏 (1981): 3次元的な掘削手順を考慮したトンネルの有限要素解析 土木学会第36回年次学術講演会講演概要集 第3部 pp. 486~487
- 2) 浅野勝博, 近藤達敏, 若佐秀雄 (1979): トンネル掘削にともなう内空変位の予測 応用地質 第20巻 第3号 pp. 97~104
- 3) Otsuka, M. and T. Kondoh (1981): On the displacement forecasting methods and their application to tunnelling by NATM Proc. of Int. Symp. on Weak Rock vol. 2 pp. 945-950

付 録

測定値を指数関数で近似するに当たって、未定係数の値を決めるためには、測定値に対する計算値との偏差平方和が最小になるように反復補正を行う方法を採用した。

いま、未定係数を a および b とし、これらの係数を変数とすれば、一般に

$$y = f(a, b) \quad (1)$$

の形で表される。そして、未定係数 a および b の初回の推定値をそれぞれ a_0 および b_0 とし、

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a \\ b &= b_0 + \Delta b \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

とおき、点 $f(a_0, b_0)$ のまわりでフーリエ展開を行うと、(1)式はつぎのように表される。

$$y = f(a_0, b_0) + \Delta a \cdot \frac{\partial f}{\partial a} + \Delta b \cdot \frac{\partial f}{\partial b} \quad (3)$$

そこで、 N 個の測定値のうち、 k 番目の測定値に対応する計算値を y_k とすれば、

$$y_k = f_k(a_0, b_0) + \Delta a \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)_k + \Delta b \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)_k \quad (4)$$

と表される。したがって、測定値 Y_k と計算値 y_k との偏差 d_k の平方和は、

$$\sum_{k=1}^N d_k^2 = \sum_{k=1}^N \left[Y_k - f_k(a_0, b_0) - \Delta a \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)_k - \Delta b \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)_k \right]^2 \quad (5)$$

と表すことができる。ここに、 $k = 1, 2, \dots, N$ である。

そこで、(5)式を最小にするためには、

$$\frac{\partial}{\partial \Delta a} \left(\sum_{k=1}^N d_k^2 \right) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Delta b} \left(\sum_{k=1}^N d_k^2 \right) = 0 \quad (7)$$

の条件を満足することが必要であり、(6)式と(7)式の2元連立方程式から Δa および Δb を決定することができる。

このようにして求めた Δa および Δb を用いて、(2)式から、 a および b の2回目の推定値 a_1 および b_1 を求める。この値を用いて、(3)式以降の式により同様の計算を繰り返して行い、 a および b の値を決定する。

(1)指数関数 $y = ae^{-bx}$ について

この指数関数 y の未定係数 a および b に関する偏微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial a} = e^{-bx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -axe^{-bx}$$

であり、(5)式はつぎのようになる。

$$\sum_{k=1}^N d_k^2 = \sum_{k=1}^N \left[Y_k - f_k - \Delta a e^{-b_0 x_k} + \Delta b a_0 x_k e^{-b_0 x_k} \right]^2 \quad (8)$$

そこで、(8)式を Δa および Δb に関して微分し、そ

の結果を零とおくと,

$$\sum_{k=1}^N (Y_k - f_k) = \Delta a \sum_{k=1}^N e^{-b_0 x_k} - \Delta b \sum_{k=1}^N a_0 x_k e^{-b_0 x_k} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_0 x_k e^{-b_0 x_k} (Y_k - f_k) \\ = \Delta a \sum_{k=1}^N a_0 x_k (e^{-b_0 x_k})^2 - \Delta b \sum_{k=1}^N (a_0 x_k e^{-b_0 x_k})^2 \end{aligned} \quad (10)$$

の関係が得られ、これらの2式から Δa および Δb を求めることができる。ここに、

$$S_1 = \sum_{k=1}^N (Y_k - f_k)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^N e^{-b_0 x_k}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^N a_0 x_k e^{-b_0 x_k}$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^N a_0 x_k (Y_k - f_k) e^{-b_0 x_k}$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^N a_0 x_k (e^{-b_0 x_k})^2$$

$$S_6 = \sum_{k=1}^N (a_0 x_k e^{-b_0 x_k})^2$$

とおくと、

$$\Delta a = \frac{S_1 S_6 - S_3 S_4}{S_2 S_6 - S_3 S_5}$$

$$\Delta b = \frac{S_1 S_5 - S_2 S_4}{S_2 S_6 - S_3 S_5}$$

と表される。

(2) 指数関数 $y = a(1 - e^{-bx})$ について

この指数関数 y の未定係数 a および b に関する偏微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 1 - e^{-bx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = a x e^{-bx}$$

であり、(5)式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N d_k^2 = \sum_{k=1}^N [Y_k - f_k - \Delta a (1 - e^{-b_0 x_k}) \\ - \Delta b a_0 x_k e^{-b_0 x_k}]^2 \end{aligned} \quad (11)$$

そこで、(11)式を Δa および Δb に関して微分し、その結果を零とおくと、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (1 - e^{-b_0 x_k}) [Y_k - f_k] \\ = \Delta a \sum_{k=1}^N (1 - e^{-b_0 x_k})^2 + \Delta b \sum_{k=1}^N a_0 x_k e^{-b_0 x_k} (1 - e^{-b_0 x_k}) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^N a_0 x_k e^{-b_0 x_k} [Y_k - f_k]$$

$$= \Delta a \sum_{k=1}^N a_0 x_k e^{-b_0 x_k} (1 - e^{-b_0 x_k}) + \Delta b \sum_{k=1}^N (a_0 x_k e^{-b_0 x_k})^2 \quad (13)$$

となり、これらの2式から Δa および Δb を求めることができる。ここに、

$$S_1 = \sum_{k=1}^N (1 - e^{-b_0 x_k}) (Y_k - f_k)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^N (1 - e^{-b_0 x_k})^2$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^N x_k f_k e^{-b_0 x_k}$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^N a_0 x_k (Y_k - f_k) e^{-b_0 x_k}$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^N (a_0 x_k e^{-b_0 x_k})^2$$

とおくと、

$$\Delta a = \frac{S_1 S_5 - S_3 S_4}{S_2 S_5 - S_3 S_3}$$

$$\Delta b = \frac{S_2 S_4 - S_1 S_3}{S_2 S_5 - S_3 S_3}$$

と表される。