

# 電子計算機による三次元地下水流の解析

上沢 弘

## COMPUTER ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL GROUNDWATER FLOW

Hiroshi UESAWA

### Abstract

Freeze(1971) announced the basic formula (Formula 1) for the analysis of three-dimensional, transient, saturated-unsaturated flow in a groundwater basin. The formula was derived using LSOR (line successive overrelaxation), a technique of implicit iterative finite difference method.

However, because Formula 1 does not mention the process of induction, it is hard for the uninitiated to grasp. Also, this formula requires strict use of all hydrologic soil property coefficients, which are numerous and require excessive computer storage.

It would be very convenient if a general purpose minicomputer could be used to make a simple three-dimensional program to analyze steady flow. To be able to do so it is first necessary to have a complete understanding of the theory.

The author took density and viscosity of water to be constant, selected representative values for coefficient of permeability in saturated and unsaturated conditions and reduced the number of hydrologic soil property coefficients to derive Formula 8 for three-dimensional steady flow. From this, Formula 12 for transient flow was also derived.

Comparing Formula 12 with Freeze's Formula 1, the author finds that, given the above abridgement of hydrologic soil property coefficients, the two formulas agree. Also, a triangle matrix equation Formula 3, based on an approximation of Formula 1, was derived and a program created.

With the above, the author believes that the theory of three-dimensional groundwater flow has become easily comprehensible and creation of programs for its theory as well has become a simple matter.

Using a simple model, horizontal and vertical seepage for steady flow was first calculated. Then comparison between two-dimensional and three-dimensional calculation in the case of rise of groundwater as results of rainfall was studied. Convergency of calculation in the case of excavation of a tunnel and a shaft was also checked.

For transient flow, pumping was conducted in nonleaky artesian aquifer and calculation performed. In these cases good results were obtained.

The author therefore believes that reasonable results were obtained when the program was used for analysis of drawdown in groundwater level following river improvement works and ground settlement due to excessive raising of groundwater.

### 1 まえがき

地下水の過剰なくみ上げによって発生する地盤沈下

は、大都市近郊を中心に急速度に広がり、社会問題となっている。また外国では、穀物増産のため、スプリングレー農業の急速な発達で、氷河から500年間にわたって

流れこんだ地下水を20数年で消費してしまい、その土地が廃地となったといわれている。このような現実を考慮するとき、地下水の状況を把握して、水資源利用計画を立案することの必要性が痛感され、そのための一手法としての地下水シミュレーションの技術が益々重要となってきた。地下水シミュレーションについては、以前には、平面二次元ならびに J. D. Bredehoeft and G. F. Pinder (1970) が発表したように準三次元として扱うことが簡単であるために、主として用いられてきたが、理論的に最適のシミュレーションは三次元解析であり、また、最近の電子計算機技術の発展は、この種の三次元解析を可能なものにさせている。

岡 (1971) は、飽和三次元浸透解析において、それま

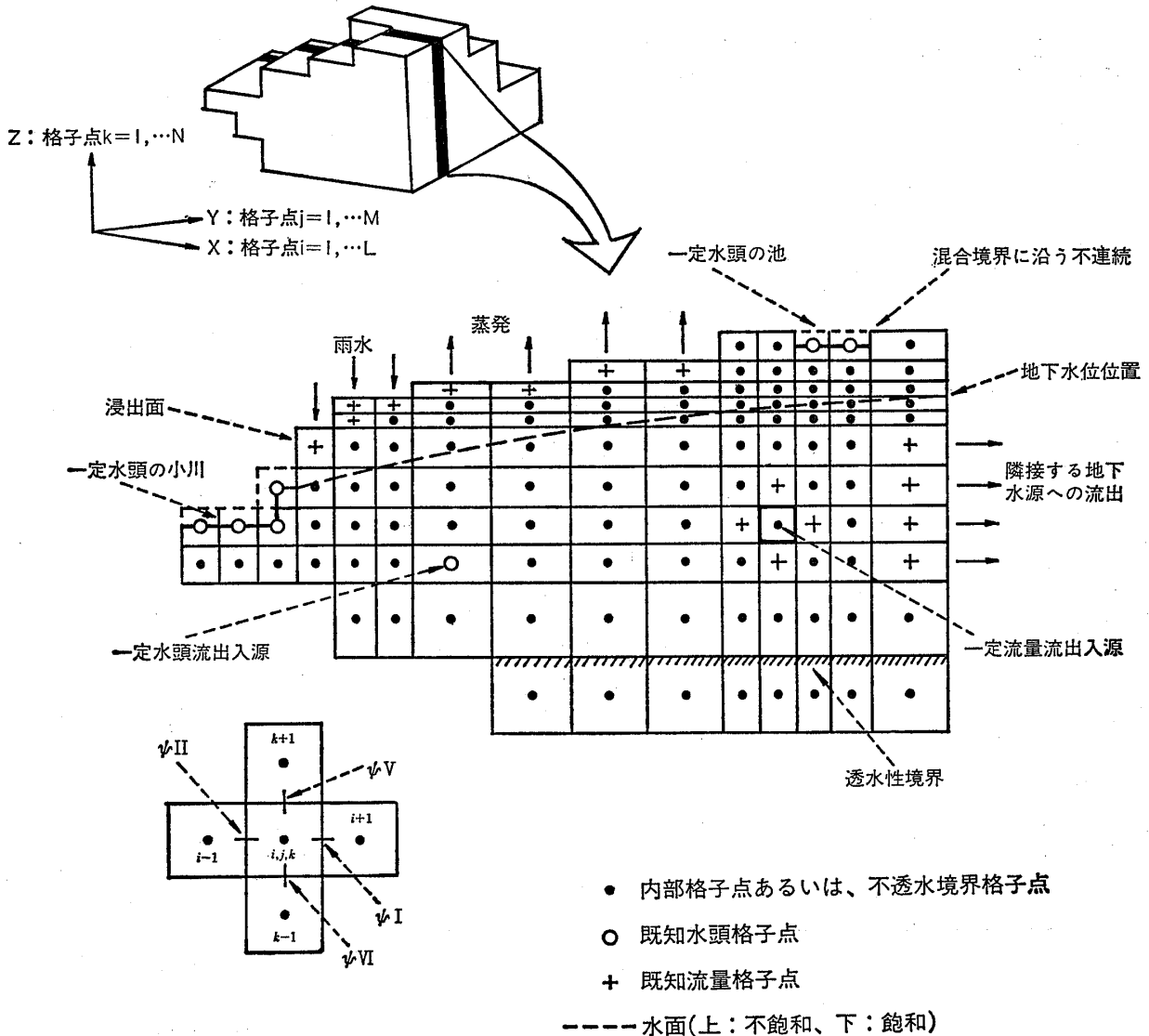
では困難であるとされていた自由水面を求めるために、その自由水面の位置で圧力は零、水頭は基準面の高さとして、その位置を修正しながら繰返し計算を行う差分法のSOR法を発表している。

また、Freeze (1971, 1972) は、差分法のLSOR法を用いて、はじめて三次元の飽和・不飽和地下水浸透解析の集大成ともいえる論文を発表した。

これらの研究は、以後の研究に大きな示唆を与えた。

その後、Segol (1976), Frind and Verge (1978), 駒田・大町(1978), Akai, Ohnishi and Nishigaki(1979)などは、有限要素法による三次元解析を示した。

計算プログラムが高度化するにつれて、その内容がブラックボックス化し、プログラム開発者以外の者には、



図一1 Freeze が示した三次元ブロック格子

Fig. 1 Three-dimensional block centered nodal grid illustrated by Freeze

その内容が十分理解されないまま使用されることは避けられない。Freeze (1972) は、「地下水計算を成功させるためには、モデルを数学的に記述して、自分のスタイルで、目的に応じたプログラムを自分で書くこと」を勧め、その際の参考にと、数十頁に及ぶメインプログラムを公表しているが、しかし簡単には解読できない。

地下水の不飽和浸透をシミュレーションするには、土の水理定数が、飽和度や圧力水頭により、どのように変化するかについて知る必要がある。しかしながら現状では、未だインプットデータとして使用できるまでに至っていない。かりにできたとしても、その調査・試験にはかなりの費用がかかり、また、これを考慮して計算を行うには大型のコンピュータを必要とするので、その費用も増大する。

しかし、水理定数を圧力水頭の関数としないまでも、飽和領域、不飽和領域において、それぞれ独立の代表値を用いることによって、定常および非定常の三次元シミュレーションが、普及型のミニコンピュータを用いて簡単にできれば、一般的問題に対しては、実用上差支えない。そこで、Freeze の三次元地下水流差分方程式を参考にして、定常および非定常の解析が容易にできるプロ

グラムを作成した。

## 2 Freeze の三次元地下水流差分方程式

Freeze (1971) は、非均質・非等方性の地下水盆における飽和・不飽和の非定常流を取り扱うために、Jacob (1940) の被圧・飽和の非定常の水の流れの基礎方程式と、Richards (1931) の不飽和状態での水の流れのポテンシャル方程式をむすび、三次元差分モデルを開発した。このモデルは不飽和部も含み、不圧ならびに被圧の場合をも取扱うことができ、地形および時間従属境界条件にかかわらず、鉛直方向のL S O R法 (Line Successive Over Relaxation) により解くことができることである。

Freeze はZ方向に定めたL S O R法において、図-1に示すようなブロック格子を使用している。この格子は、鉛直方向において不連続にならないように、任意の形にすることができ、格子間隔は可変である。そして、時間ステップにおける内部格子点に対し、圧力水頭を用いて、つぎのような三次元地下水流の基礎方程式の差分式を示している。

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{g}{\mu \Delta x_i} \left[ \rho^2(\phi_I) k(\phi_I) \left( \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} (\phi_{i+1}^t + \phi_{i+1}^{t-1} - \phi_i^t - \phi_i^{t-1}) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \rho^2(\phi_{II}) k(\phi_{II}) \left( \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} (\phi_i^t + \phi_i^{t-1} - \phi_{i-1}^t - \phi_{i-1}^{t-1}) \right) \right] \right\}_{j,k} \\
 & + \left\{ \frac{g}{\mu \Delta y_j} \left[ \rho^2(\phi_{III}) k(\phi_{III}) \left( \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} (\phi_{j+1}^t + \phi_{j+1}^{t-1} - \phi_j^t - \phi_j^{t-1}) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \rho^2(\phi_{IV}) k(\phi_{IV}) \left( \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} (\phi_j^t + \phi_j^{t-1} - \phi_{j-1}^t - \phi_{j-1}^{t-1}) \right) \right] \right\}_{i,k} \\
 & + \left\{ \frac{g}{\mu \Delta z_k} \left[ \rho^2(\phi_V) k(\phi_V) \left( 1 + \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} (\phi_{k+1}^t + \phi_{k+1}^{t-1} - \phi_k^t - \phi_k^{t-1}) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \rho^2(\phi_{VI}) k(\phi_{VI}) \left( 1 + \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} (\phi_k^t + \phi_k^{t-1} - \phi_{k-1}^t - \phi_{k-1}^{t-1}) \right) \right] \right\}_{i,j} \\
 & = \left\{ \left[ \frac{\rho(\phi_{VII}) \theta(\phi_{VII})}{n(\phi_{VII})} (\alpha' + n(\phi_{VII}) \beta') + \rho(\phi_{VII}) C(\phi_{VII}) \right] \left( \frac{\phi^t - \phi^{t-1}}{\Delta t^t} \right) \right\}_{i,j,k} \quad (1)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$k = \frac{\mu K}{\rho g} \quad (2)$$

ここに、 $x, y, z$ : 座標軸方向 (cm)

$z$ : 位置水頭 (水柱 cm)

$\phi$ : 圧力水頭 (水柱 cm)

$g$ : 重力加速度 (cm/sec<sup>2</sup>)

$\mu$ : 水の粘性係数 (gm/cm<sup>2</sup>·sec)

$\rho$ : 水の密度 (gm/cm<sup>3</sup>)

$k$ : 固有透過度 (cm<sup>2</sup>)

$K$ : 透水係数 (cm/sec)

$n$ : 間げき率 (小数)

$\theta$ : 体積含水率 (小数)

$C$ : 比水分容量 (水柱 cm<sup>-1</sup>)

$\alpha'$ : 地層の垂直圧縮指数 (水柱 cm<sup>-1</sup>)

$\alpha' = \alpha \rho g$  ( $\alpha$ : 地層の垂直圧縮率)

$\beta'$ : 水の圧縮指数 (水柱 cm<sup>-1</sup>)

$$\beta' = \beta \rho g \quad (\beta: \text{水の圧縮率})$$

$t$ : 時間 (sec)

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ : 格子間隔 (cm)

$\phi_I \sim \phi_{VI}$ : 格子境界における圧力水頭

$\phi_{VII}$ : 格子中心における予想圧力水頭

$i, j, k$  (下側文字):  $x, y, z$  方向格子番号

$t$  (肩文字): 時間ステップ番号

L S O R法においては, (1)式の連立方程式の係数を

$$-A_k \phi_{i,j,k+1}^t + B_k \phi_{i,j,k}^t - C_k \phi_{i,j,k-1}^t = D_k \quad (3)$$

のようにグループ分けを行って, 三項方程式スキームで迅速に解くようにしている。また, 三次元メッシュの鉛直ライン走査に際しては, (3)式の右辺  $D_k$  にはいつている若干の未知の隣接ラインの  $\phi^t$  は, すべての  $\phi^{t-1}$  が既知であるように, もっとも近い繰り返し計算値を既知として使用する。なお, 水理定数の値は, 予め定めた圧力水頭との関係曲線から求め, 計算の途中でその値を変化させて使用する。

求められた  $\phi$  において,  $\phi > 0$  は飽和状態,  $\phi < 0$  は不飽和状態,  $\phi = 0$  は自由水面を示すとみなしている。

### 3 OYOプログラム TRIW8 について

#### 3-1 定常流の場合

Freeze (1971) は, さきに示したように飽和・不飽和の非定常流に関して, (1)式および(3)式を求めているが, 定常流の場合については特に触れていない, そこで, 定常流に関する差分式を求めるに当って, ミニコンピュータの使用を前提とし, 許される範囲においてメモリの縮少を図ることとした。そこで, 水理定数のうち, 水の密度  $\rho$  は  $1\text{gm/cm}^3$  とし, 水の粘性係数  $\mu$  は一定であるとすれば, (2)式の関係から水理定数は, 透水係数  $K$  によって代表させることができる。そして, この  $K$  の値は圧力水頭  $\phi$  に関係なく, 飽和域および不飽和域それぞれにおいて, 一定の値をもつものとした。

図-2において,  $X$ 軸方向の  $i$  番目,  $Y$ 軸方向の  $j$  番目および  $Z$ 軸方向の  $k$  番目の  $(i, j, k)$  格子について,  $t$  時において流入する水量と流出する水量の差, すなわち残留量は, ダルシーの法則によって, つぎのように表すことができる。

$X$ 軸方向について

$$\begin{aligned} (Q_L - Q_R)x &= \rho K I \frac{\phi_{i+1}^t - \phi_i^t}{\frac{1}{2}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \Delta y_j \Delta z_k \\ -\rho K II &\frac{\phi_i^t - \phi_{i-1}^t}{\frac{1}{2}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \Delta y_j \Delta z_k \end{aligned} \quad (4)$$

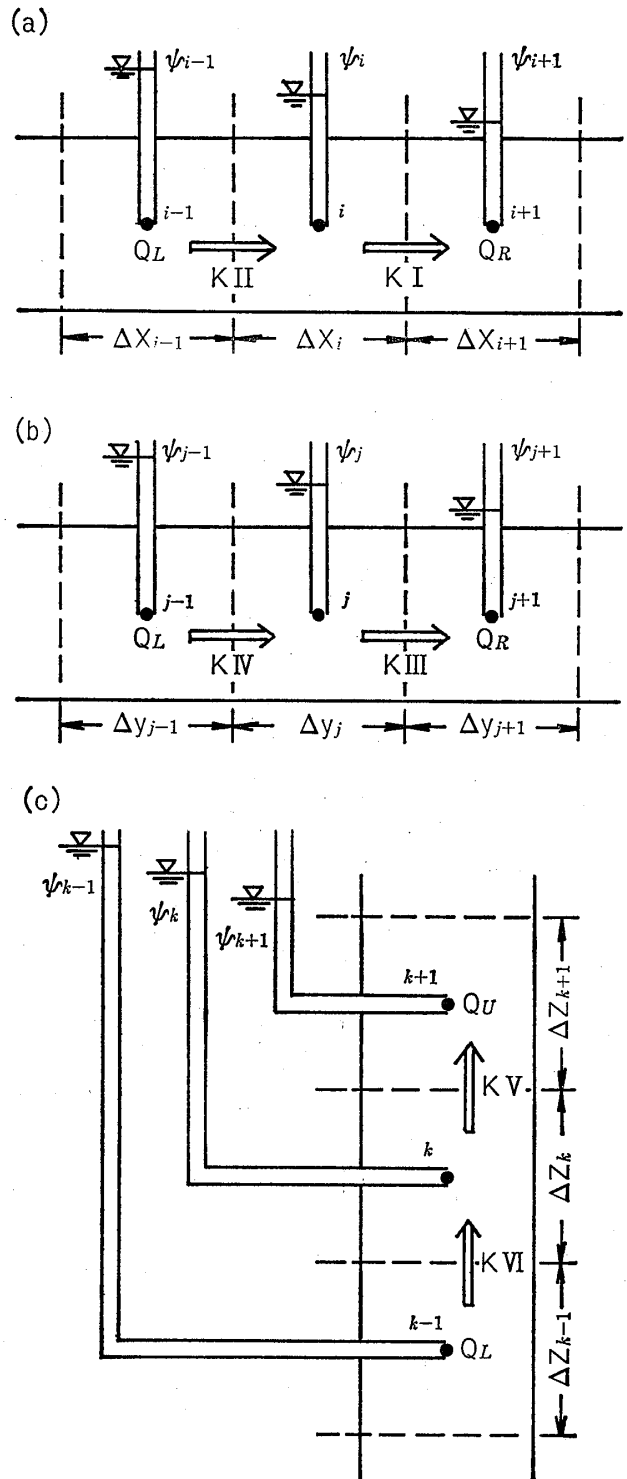


図-2  $i, j, k$  格子点における地下水の流れ  
(a)  $X$ 軸方向, (b)  $Y$ 軸方向, (c)  $Z$ 軸方向

Fig. 2 Inflow and outflow for a nodal grid ( $i, j, k$ ) in system of three-dimensional flow  
(a)  $X$ ( $i$ )-direction, (b)  $Y$ ( $j$ )-direction, (c)  $Z$ ( $k$ )-direction

Y 軸方向について

$$\begin{aligned} (Q_L - Q_R)y &= \rho K_{III} \frac{\phi_{j+1}^t - \phi_j^t}{\frac{1}{2}(\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \Delta z_k \Delta x_i \\ -\rho K_{IV} \frac{\phi_j^t - \phi_{j-1}^t}{\frac{1}{2}(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})} \Delta z_k \Delta x_i \end{aligned} \quad (5)$$

Z 軸方向について

$$\begin{aligned} (Q_L - Q_U)z &= \rho K_V \left(1 + \frac{\phi_{k+1}^t - \phi_k^t}{\frac{1}{2}(\Delta z_k + \Delta z_{k+1})}\right) \Delta x_i \Delta y_j \\ -\rho K_{VI} \left(1 + \frac{\phi_k^t - \phi_{k-1}^t}{\frac{1}{2}(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})}\right) \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $\phi$  : 圧力水頭 (水柱 cm)  
 $K$  : 透水係数 (cm/sec)  
 $\rho$  : 水の密度 (gm/cm<sup>3</sup>)

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  : 格子間隔 (cm)

$K_I \sim K_{VI}$  : 格子境界における透水係数

$Q_L - Q_R$  : 残留量

そして、格子境界における透水係数  $K_I \sim K_{VI}$  は、つぎに示すように、相隣り合った格子の透水係数の相乗平均

とする。

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \sqrt{K(i, j, k) \times K(i+1, j, k)} \\ K_{II} &= \sqrt{K(i-1, j, k) \times K(i, j, k)} \\ K_{III} &= \sqrt{K(i, j, k) \times K(i, j+1, k)} \\ K_{IV} &= \sqrt{K(i, j-1, k) \times K(i, j, k)} \\ K_V &= \sqrt{K(i, j, k) \times K(i, j, k+1)} \\ K_{VI} &= \sqrt{K(i, j, k-1) \times K(i, j, k)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

一方、流れの連続性の法則から、(4)式、(5)式および(6)式で表される 3 方向の流入水量と流出水量の差の和は零でなければならない。したがって、

$$(Q_L - Q_R)x + (Q_L - Q_R)y + (Q_L - Q_U)z = 0$$

として整理すると、つぎの関係式が得られる。

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\rho}{\Delta x_i} \left[ K_I \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} (\phi_{i+1}^t - \phi_i^t) - K_{II} \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} (\phi_i^t - \phi_{i-1}^t) \right] \right\}_{j, k} \\ &+ \left\{ \frac{\rho}{\Delta y_j} \left[ K_{III} \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} (\phi_{j+1}^t - \phi_j^t) - K_{IV} \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} (\phi_j^t - \phi_{j-1}^t) \right] \right\}_{k, i} \\ &+ \left\{ \frac{\rho}{\Delta z_k} \left[ K_V \left(1 + \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} (\phi_{k+1}^t - \phi_k^t)\right) - K_{VI} \left(1 + \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} (\phi_k^t - \phi_{k-1}^t)\right) \right] \right\}_{i, j} \end{aligned} \quad (8)$$

= 0

LSOR法を適用するに当り、(8)式の連立方程式の係数を

$$A_k \phi_{i, j, k+1}^t + B_k \phi_{i, j, k}^t + C_k \phi_{i, j, k-1}^t = D_k \quad (9)$$

のように表す。ここに、

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{\rho}{\Delta z_k} \left[ K_V \left( \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \right) \right] \\ B_k &= -\frac{\rho}{\Delta x_i} \left[ K_I \left( \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \right) + K_{II} \left( \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right) \right] - \frac{\rho}{\Delta y_j} \left[ K_{III} \left( \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \right) + K_{IV} \left( \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\rho}{\Delta z_k} \left[ K_V \left( \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \right) + K_{VI} \left( \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) \right] \\ C_k &= \frac{\rho}{\Delta z_k} \left[ K_{VI} \left( \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) \right] \\ D_k &= -\frac{\rho}{\Delta x_i} \left[ K_I \left( \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \right) (\phi_{i+1}^t) + K_{II} \left( \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right) (\phi_{i-1}^t) \right] - \frac{\rho}{\Delta y_j} \left[ K_{III} \left( \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \right) (\phi_{j+1}^t) \right. \\ &\quad \left. + K_{IV} \left( \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right) (\phi_{j-1}^t) \right]_{k, i} - \frac{\rho}{\Delta z_k} \left[ K_V - K_{VI} \right]_{i, j} \end{aligned} \quad (10)$$

そこで、(9)式の連立方程式を解くに当り、方程式の数と未知数の数の対応を調べる。いま、簡単化のために、 $z$ 方向の  $k=4$  の場合を例にとると、つぎのような配列の4個の式が得られる。

	$\phi_5$	$\phi_4$	$\phi_3$	$\phi_2$	$\phi_1$	$\phi_0$	
$k=1$				$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$
$k=2$			$A_2$	$B_2$	$C_2$		$D_2$
$k=3$		$A_3$	$B_3$	$C_3$			$D_3$
$k=4$	$A_4$	$B_4$	$C_4$				$D_4$

(11)

すなわち、4個の式に対して未知数が6個 ( $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5$ ) あり、このままではこの連立方程式は解くことはできない。

$\phi_0$  および  $\phi_5$  を消去し、未知数を4個 ( $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ ) として(11)式の連立方程式を解くために、次の3つの消去法が考えられる。

$\phi_0, \phi_5$  がそれぞれ、下端、上端の既知の圧力水頭値であれば、 $A_4 \times \phi_5, C_1 \times \phi_0$  は定数となるので、(9)式において右辺に移すことにより、 $\phi_0, \phi_5$  を消去できる。

被圧の場合は、下端と上端を不透水とするため下端の  $k=1$  と  $k=0$  の格子間で水の流れはないものとし、 $K_{VI}=0$  とすれば、 $C_1=0$  となり  $\phi_0$  を消去できる。同様に、上端の  $k=4$  と  $k=5$  の格子間でも水の流れはないものとし、 $K_{VII}=0$  とすれば  $A_4=0$  となり  $\phi_5$  を消去できる。

不圧の場合は、下端を不透水とするため、下端の  $k=1$  と  $k=0$  の格子間で水の流れはないものとし、 $K_{VI}=0$  とすれば、 $\phi_0$  を消去できる。上端の境界条件として、 $\phi_5$  の値は水面までの深さに負の符号をつけた既知の値として、(9)式において  $A_4 \times \phi_5$  を右辺に移すか、あるいは  $A_4$  項を  $B_4$  項の中に入れて修正することにより  $\phi_5$  を消去できるが、 $K_{VII}=0$  のときと同じ結果になる。

このようにして、未知数は4個 ( $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ ) となり、(11)式の連立方程式は解くことが可能になる。

流入・流出量は、その格子点で、格子体積で除し、単位体積あたりの量にして、(10)式において  $D_k$  を表した式の中に加えて計算すればよい。

次にもとめた計算値をLSOR法では、収斂を早めるため、加速係数  $\omega$  を使用して次式により修正し、差が十分小さくなるまで繰返し計算し解をもとめる。

$$\phi^{t,tt} = \omega \phi^{cal,t,tt} + (1-\omega)\phi^{t,tt-1}$$

$\phi^{t,tt-1}$  : 前回計算値

$\phi^{cal,t,tt}$  : 計算値

$\phi^{tt}$  : 修正計算値

$\omega$  : 加速係数  $1 \leq \omega < 2$  の範囲の定数

Freezeは  $\omega$  の最適値として1.88の数値を挙げている。

### 3-2 非定常流の場合

非定常流の場合については、定常流の場合の  $t$  時における圧力水頭  $\phi^t$  の代りに、 $t$  時の圧力水頭  $\phi^t$  と、 $t-1$  時の圧力水頭  $\phi^{t-1}$  の平均値を用いることにする。すなわち、(8)式における  $\phi^t$  を、

$$\frac{1}{2}(\phi^t + \phi^{t-1})$$

とし、また、(8)式の右辺に、 $t-1$  時と  $t$  時の圧力水頭の変化によって単位体積の多孔質媒体が強性的に伸張あるいは収縮し、これによって単位時間に吸収あるいは放出する水量を加えると、非定常流の差分近似式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\rho}{\Delta x_i} \left[ K_I \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} (\phi_{i+1}^t + \phi_{i+1}^{t-1} - \phi_i^t - \phi_i^{t-1}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - K_{II} \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} (\phi_i^t + \phi_i^{t-1} - \phi_{i-1}^t - \phi_{i-1}^{t-1}) \right] \right\}_{j,k} \\ & + \left\{ \frac{\rho}{\Delta y_j} \left[ K_{III} \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} (\phi_{j+1}^t + \phi_{j+1}^{t-1} - \phi_j^t - \phi_j^{t-1}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - K_{IV} \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} (\phi_j^t + \phi_j^{t-1} - \phi_{j-1}^t - \phi_{j-1}^{t-1}) \right] \right\}_{k,i} \\ & + \left\{ \frac{\rho}{\Delta z_k} \left[ K_V \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} (\phi_{k+1}^t + \phi_{k+1}^{t-1} - \phi_k^t - \phi_k^{t-1}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - K_{VI} \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} (\phi_k^t + \phi_k^{t-1} - \phi_{k-1}^t - \phi_{k-1}^{t-1}) \right] \right\}_{i,j} \\ & = S \left( \frac{\phi^t - \phi^{t-1}}{\Delta t} \right)_{i,j,k} \end{aligned} \tag{12}$$

ここに、 $S = \rho(n\beta + \alpha)$  : Jacob の比貯留率

$\rho$  : 水の密度

$n$  : 地層の間げき率

$\beta$  : 水の圧縮率

$\alpha$  : 地層の垂直圧縮率

なお、(12)式のプログラミングを簡単にするためには、(12)式における  $\phi^t + \phi^{t-1}$  を1個の未知数に置き換えて考えれば、定常流の場合の(8)式と同じように、未知数2ヶの配列になる。

この場合も、LSOR法を適用するに当り、(12)式の連立方程式の係数を

$$\begin{aligned} A'_k(\phi_{i,j,k+1}^t + \phi_{i,j,k+1}^{t-1} + B'_k(\phi_{i,j,k}^t + \phi_{i,j,k}^{t-1}) \\ + C'_k(\phi_{i,j,k-1}^t + \phi_{i,j,k-1}^{t-1})) = D'_k \end{aligned} \tag{13}$$

のように表すことができる。ここに

表-1 OYOプログラムと FREEZE プログラムの比較

Table-1 Comparison with OYO-program and Freeze-program

プログラム	差分方程式	方程式解法	不圧	被圧	定常	非定常	飽和 滲透	不飽和 滲透	圧力水頭変化に よる水理定数の 非線型考慮
OYO	LSOR 法	GAUSS-JORDAN 消去法	○	○	○	○	○	△	×
R. ALLAN FREEZE	LSOR 法	3項方程式スキーム	○	○	○	○	○	○	○

○可能 ×できない △条件付きでできる。

(不飽和領域では、一つの定数の透水係数を使用する)

$$\begin{aligned}
 A'_k &= -\frac{\rho}{\Delta z_k} \left[ K_V \left( \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \right) \right] \\
 B'_k &= -\frac{\rho}{\Delta x_i} \left[ K_I \left( \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \right) + K_{II} \left( \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\rho}{\Delta y_j} \left[ K_{III} \left( \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \right) + K_{IV} \left( \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\rho}{\Delta z_k} \left[ K_V \left( \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \right) + K_{VI} \left( \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) \right] \\
 &\quad - S \left( \frac{1}{\Delta t} \right)_{i,j,k} \\
 C'_k &= \frac{\rho}{\Delta z_k} \left[ K_{VI} \left( \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) \right] \\
 D'_k &= -\frac{\rho}{\Delta x_i} \left[ K_I \left( \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \right) (\phi_{i+1}^t + \phi_{i+1}^{t-1}) \right. \\
 &\quad \left. + K_{II} \left( \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right) (\phi_{i-1}^t + \phi_{i-1}^{t-1}) \right]_{j,k} \\
 &\quad - \frac{\rho}{\Delta y_j} \left[ K_{III} \left( \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \right) (\phi_{j+1}^t + \phi_{j+1}^{t-1}) \right. \\
 &\quad \left. + K_{IV} \left( \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right) (\phi_{j-1}^t + \phi_{j-1}^{t-1}) \right]_{k,i} \\
 &\quad - \frac{\rho}{\Delta z_k} [K_V - K_{VI}]_{i,j} - 2S \left( \frac{\phi^{t-1}}{\Delta t} \right)_{i,j,k} \\
 S \left( \frac{\phi^t - \phi^{t-1}}{\Delta t} \right)_{i,j,k} &= S \left( \frac{\phi^t + \phi^{t-1} - 2\phi^{t-1}}{\Delta t} \right)_{i,j,k} \\
 &= S \left( \frac{\phi^t + \phi^{t-1}}{\Delta t} \right)_{i,j,k} - 2S \left( \frac{\phi^{t-1}}{\Delta t} \right)_{i,j,k}
 \end{aligned} \tag{14}$$

上に述べたように、非定常流の場合は、定常流の場合に求められた(8)式を若干修正・加項するだけですむ。ただし、求められる値は、前のステップの計算値との和であるので、最終的には、前のステップの値を差引いて真の値を求めることが必要となる。

OYOプログラム TRIW8 と Freeze のプログラムを比較すると、表-1に示すようになる。

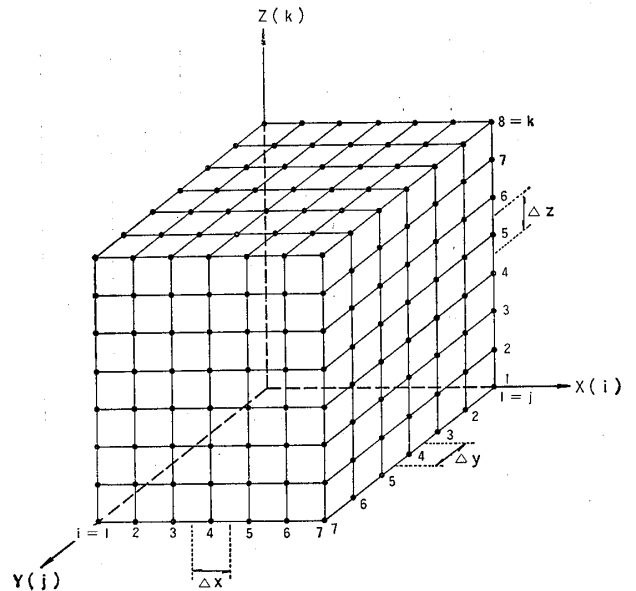


図-3 三次元格子

Fig. 3 Three-dimensional nodal grid

4 プログラムの検算

- (1) 定常流の場合
- (a) 最も単純なモデルとして、図-3に示すような三

次元格子 ( $i = 1, \dots, 7; j = 1, \dots, 7; k = 1, \dots, 8$ ) を考える。まず、水平方向の浸透を調べるために、図-4に示すように、( $j = 1, k = 7$ )における圧力水頭を500、( $j = 5, k = 7$ )における圧力水頭を300、鉛

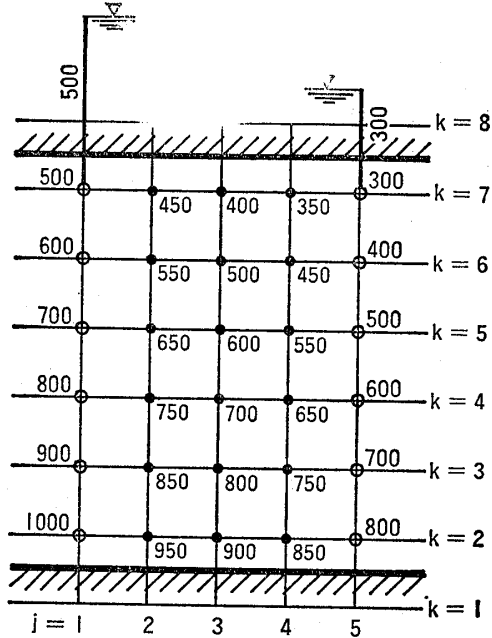


図-4 水平浸透における計算圧力水頭値  
Fig. 4 Calculated pressure heads in horizontal seepage

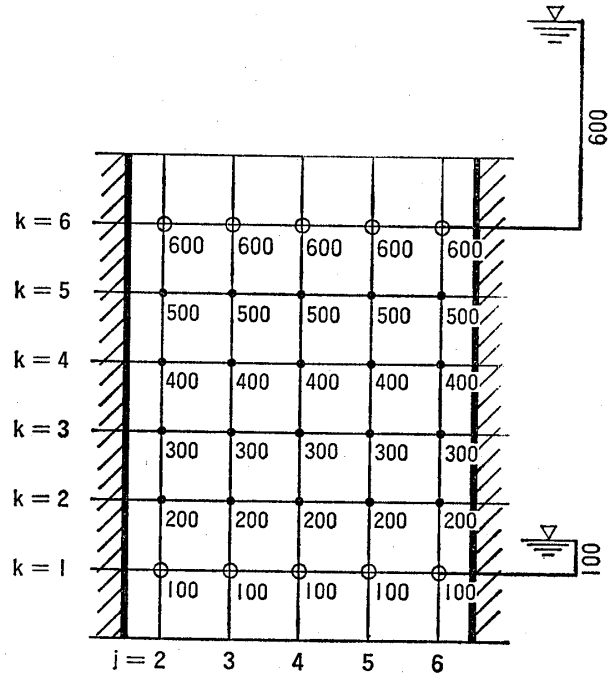


図-5 鉛直浸透における計算圧力水頭値  
Fig. 5 Calculated pressure heads in vertical seepage

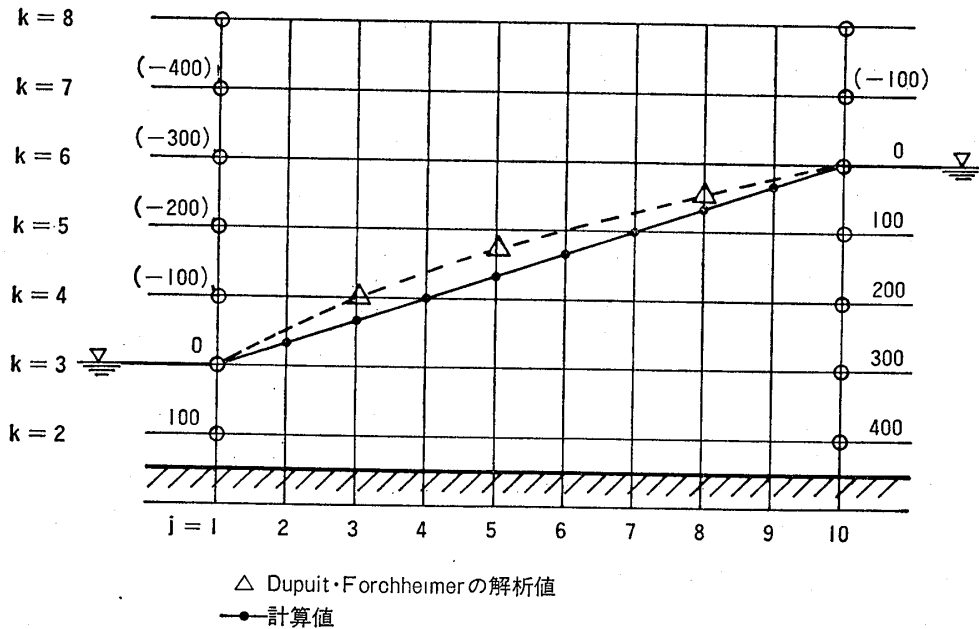


図-6 水平浸透における自由水面  
Fig. 6 Groundwater levels in horizontal seepage



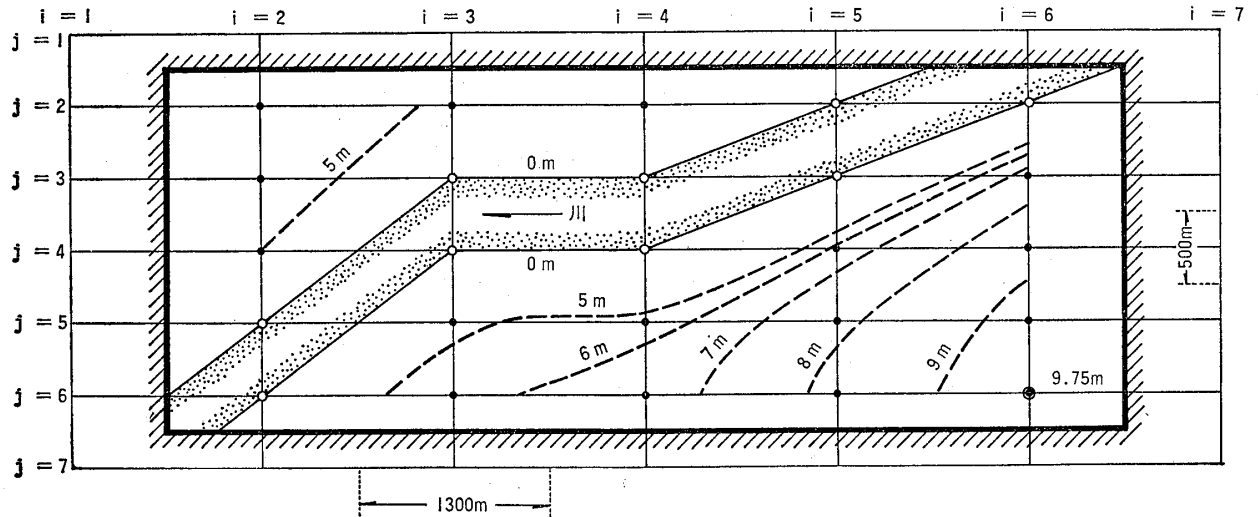


図-7 降雨による河川流域の地下水位上昇計算

Fig. 7 Rise of groundwater levels in a river basin as result of rainfall

直方向の格子間の水頭差を100とし、上面と下面およびX方向の2側面は不透水という条件を与えた。計算結果は図-4に示すように、内部の圧力水頭は、すべての面に対して直線的に変化している。

つぎに、鉛直方向の浸透を調べるために、図-5に示すように、 $k=6$ 面における圧力水頭を600、 $k=1$ 面における圧力水頭を100とした。これらの定数に(10)式によりもとめたA項、C項をそれぞれ乗じた値は定数となるので、先にのべた第1の消去法により(9)式において右

辺に移して解をもとめた。なお、鉛直方向の周囲の4側面は不透水という条件を与えた。各格子点の圧力水頭は図-5に示すとおりで、圧力水頭は、すべての $k$ 面に対して直線的に変化している。

つぎに、不圧の状態における水平方向の浸透における自由水面をもとめることにする。図-6に示すように、格子間隔はすべて100とし、点( $j=1, k=3$ )および点( $j=10, k=6$ )においては、自由水面とすれば、それらの点における圧力水頭を零とすることができる。また深さ方向の圧力水頭の分布は静水圧とし、上端は先に述べた不圧の場合の条件を用い、下端およびX方向の2側面は不透水の条件を与えた。計算結果は図-6に示すように、LSOR法において、自由水面と仮定した圧力水頭が零の位置はJ方向に直線的に分布する。ここで、Dupuit・Forchheimerの解析解により計算した水面とくらべると、本計算水面は直線的形状を示し、若干低目になる。Dupuit・Forchheimerの計算では、境界水位を左端で100、右端で400とし、水平距離は900として行った。なお被圧の場合のように上面の $k=7$ と $k=8$ の格子の間で $K_v=0$ としても、1%ほど小さな計算値となり、両者の差はない。

以上から、この報告に示すプログラムは、被圧を受けた地下水盆の地下水流を解析するには、正確といえるが、不圧における自由水面をもとめるときには、Dupuit・Forchheimerの式による水面とくらべて若干低目になる。しかしながら、この報文に示すプログラムが近似式であることを考慮するとき、十分役立つことを示しているといえる。

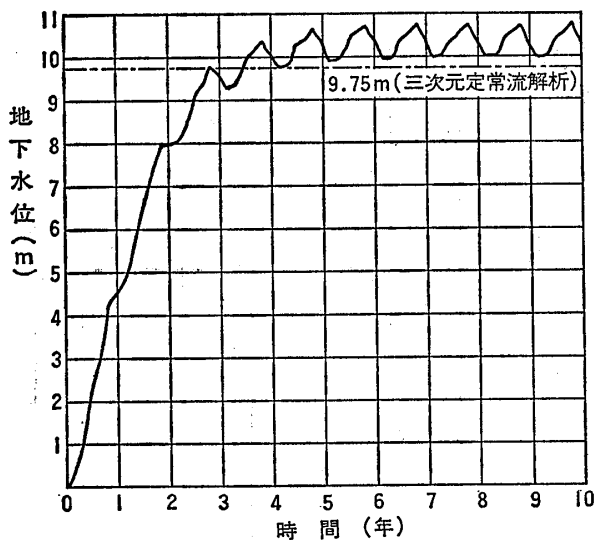


図-8 平面二次元非定常流計算と三次元定常流計算の比較

Fig. 8 Comparison between two-dimensional transient, horizontal flow and three-dimensional steady flow calculations

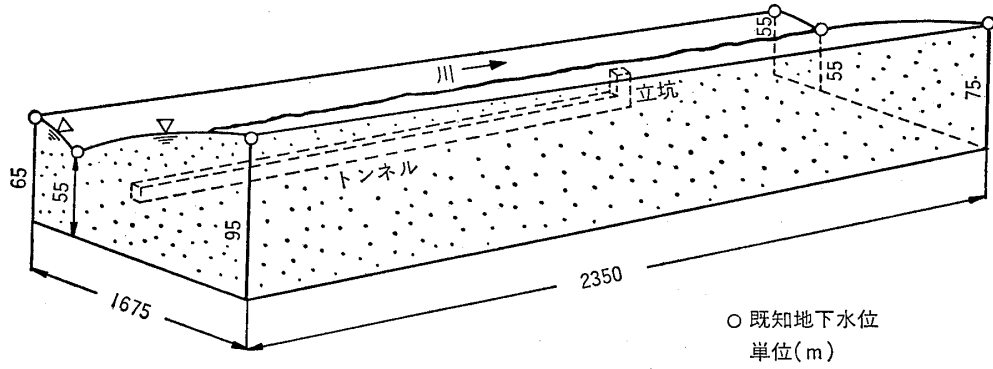


図-9 地形模式図

Fig. 9 Model of geography

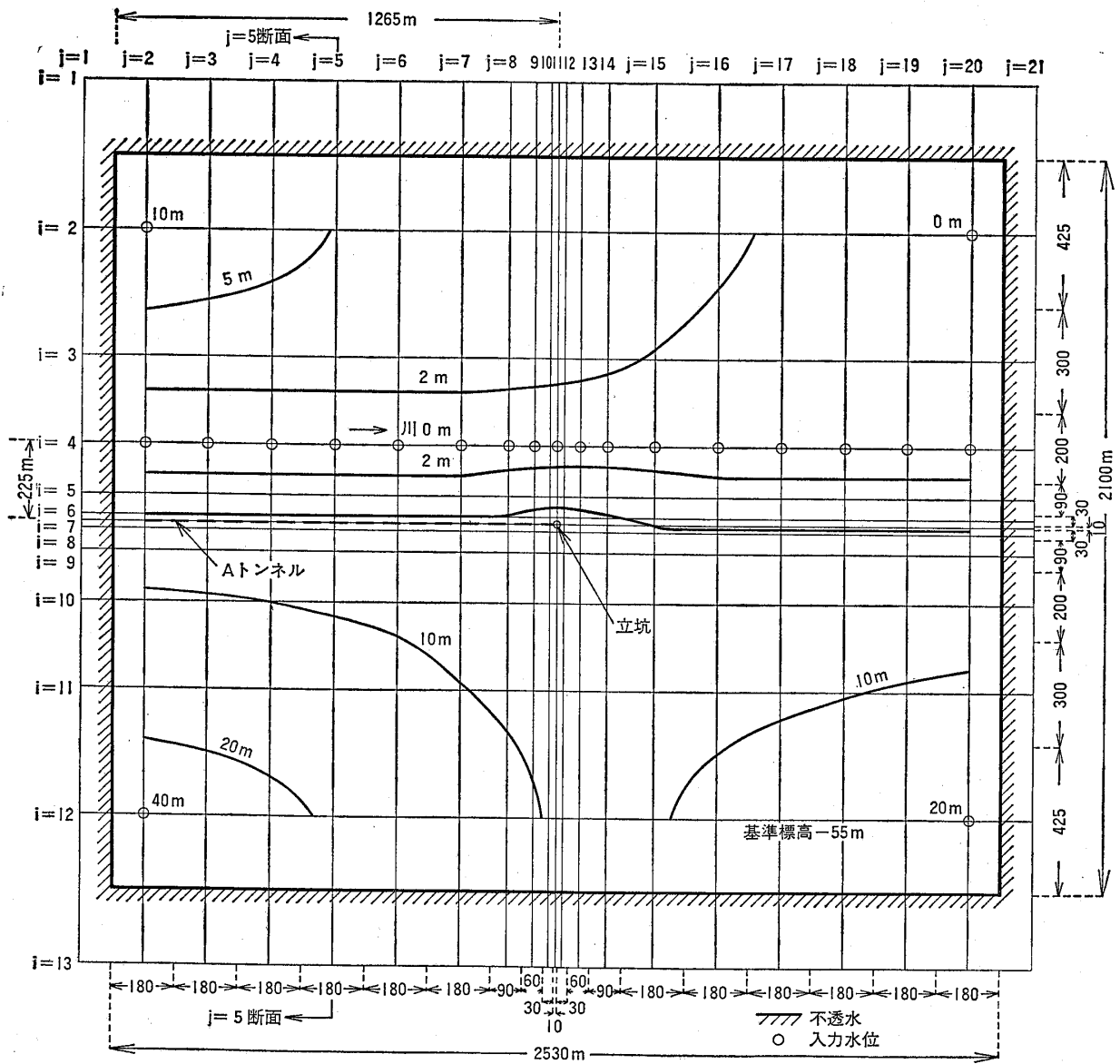


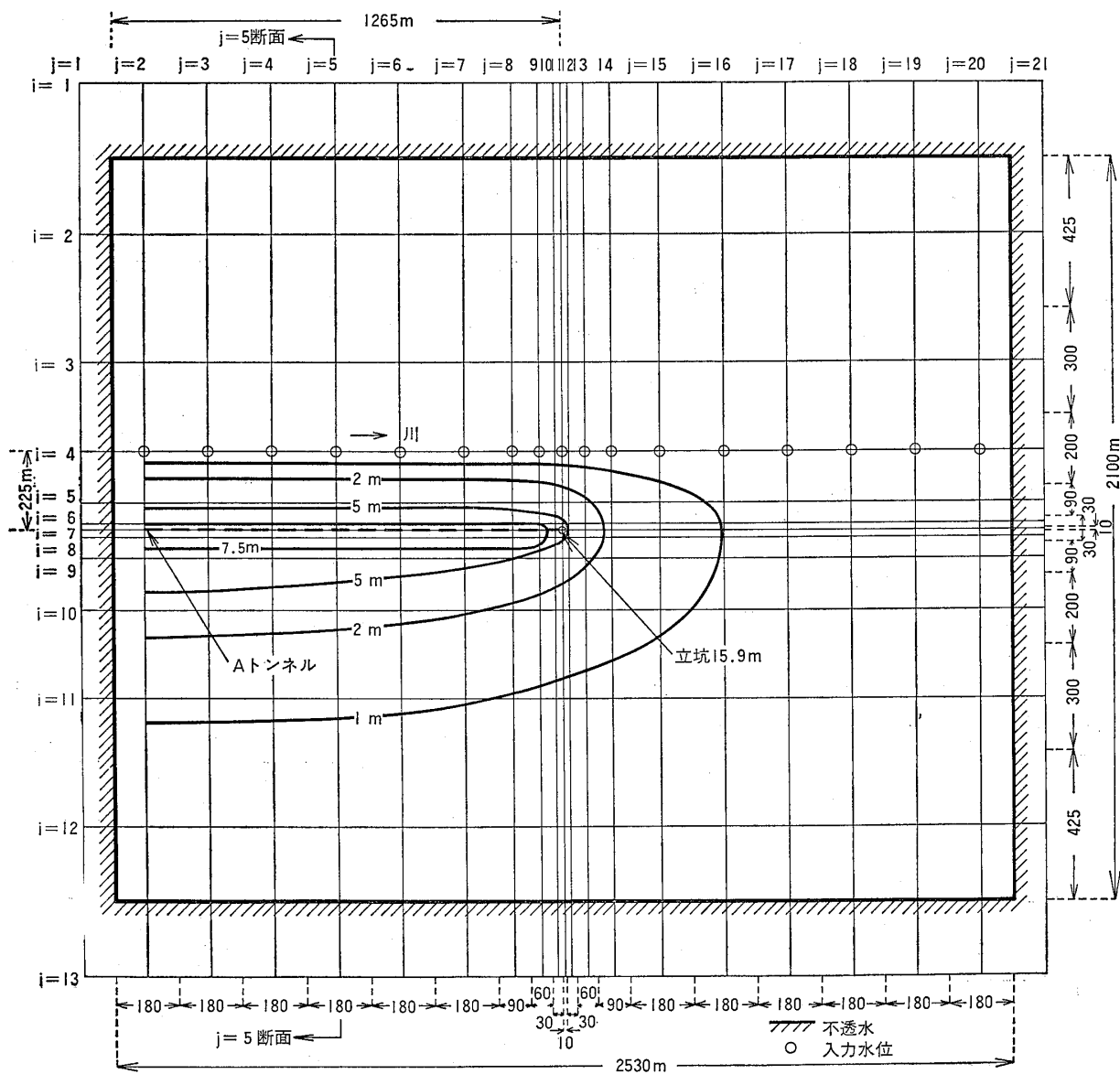
図-10 トンネル、立坑掘削前地下水位 (平面図)

Fig. 10 Calculated groundwater levels before excavation of a Tunnel and a Shaft (Plan)

(b) やや複雑なモデルとして、降雨による河川流域の地下水上昇について計算を行った。モデルとしては、図一7に示すように、 $(j=2, i=5-6)$  から  $(j=5-6, i=2)$  の方へ川が流下する。そして、川の水位は川上と川下で差がないものとし、各格子点で0とした。また、格子  $i=1$  と  $i=2$ ,  $i=6$  と  $i=7$ ,  $j=1$  と  $j=2$ ,  $j=6$  と  $j=7$  における太線の部分は山麓であって、不透水と仮定し、計算においては不透水の条件を与えた。使用した格子点数は、 $i=7$ ,  $j=7$ ,  $k=8$  で、総計 392 点である。格子点の間隔は、X 方向が 1300m, Y 方向 500m, Z 方向 3m としてあるので、

モデルの大きさは  $5200\text{m} \times 2000\text{m} \times 15\text{m}$  である。計算に当っては土の透水係数  $K$  を  $1 \times 10^{-1}\text{cm/sec}$  とし、降雨の地盤への浸透量は、年平均降雨量  $1390\text{mm/year}$  とし、蒸発はないものとした。計算の結果得られた地下水位上昇は図一7に示す通りで、図の右下部、すなわち、点  $(i=6, j=6)$  において  $9.75\text{m}$  という最大上昇値を示している。

一方、同じモデルについて、**OYO** プログラム PLG 18 によって求めた平面二次元の解析結果によると、地下水位上昇の最大値は上記と同じ点に生じており、この点の地下水位の変動状況は、図一8のようになる。この計



図一11 トンネル・立坑掘削による地下水位の低下量  $\Delta H(\text{m})$  (平面図)  
 Fig. 11 Calculated change of groundwater levels  $\Delta H$  after excavation of a Tunnel and a Shaft (Plan)

算では月別平均降雨量を用い、有効空ゲキ率を0.3,  $\Delta T = 5$ 日とし、非定常流で行ってある。図-8に示すように、約8年で定常状態に達し、乾季で約10m、雨期で10.8mの地下水位を示している。

図-7に示す結果と図-8の結果を比較するとき、前者が三次元定常流、後者が二次元非定常流という相異があるにもかかわらず、最大地下水位が9.75mと10~10.8mとほとんど同じ値であることは、この三次元プログラムの妥当性を示しているといえる。

(c) 格子間隔が著しく変化した場合の解の収斂性の検討例として、トンネルと立坑掘削による地下水位の低下の計算を行った。図-9の地形模式図のように、まわりは不透水境界でかこまれた幅1675m、長さ2350mの帯水層の中央を川が流れ、川の水面の高さは基盤から55mで、周辺の地下水位は、川の高さより川上左側で10m、右側で40m、川下左側で0m、右側で20m高くなっている。

トンネルは川の右側225m、下方10mを川と平行に通り、中央の点で立坑につながる。トンネルならびに立坑の大きさは10m×10mの正方形断面にモデル化した。格子間隔は、このことを考慮して、*i*方向は最小10m、最大425mの6種、*j*方向は最小10m、最大の180mの5種、

*z*方向は最小10m、最大20mの2種とした。したがって、使用した格子点数は  $i = 13, j = 21, k = 12$  となり、総計3276ヶである。透水係数は  $K = 10^{-3} \text{cm/s}$  として行った。

以上のデータをインプットして、トンネル・立坑掘削前の地下水位コンターを図-10のようにもとめた。

トンネルならびに立坑掘削による地下水位の低下量は、図-11の平面図、図-12の断面図のとおりである。平面的に見ると、図-11のように地下水位の低下は立坑の中心で15.9mと最も大きく、半径20mのところでは8~9mの低下となる。

トンネル直上の水位の低下は7.5mで、トンネルの位置と一致している。川の左側の水位の低下はない。水位低下1mのラインは、切羽前方450mの範囲に達することになる。

ここで計算値の収斂状況を調べると、図-13(a), (b)のとおりである。トンネル中央部でトンネル軸格子点より10m上の格子点  $i = 7, j = 6, k = 6$  の格子点では、図-13(a)に示すように、計算繰返回数20回で、収斂に近いと考えられる。同じ格子点でトンネル・立坑がない場合は10回で収斂している。またトンネル切羽前方450m遠方の  $i = 7, j = 16, k = 5$  の格子点では、図-13(b)に示

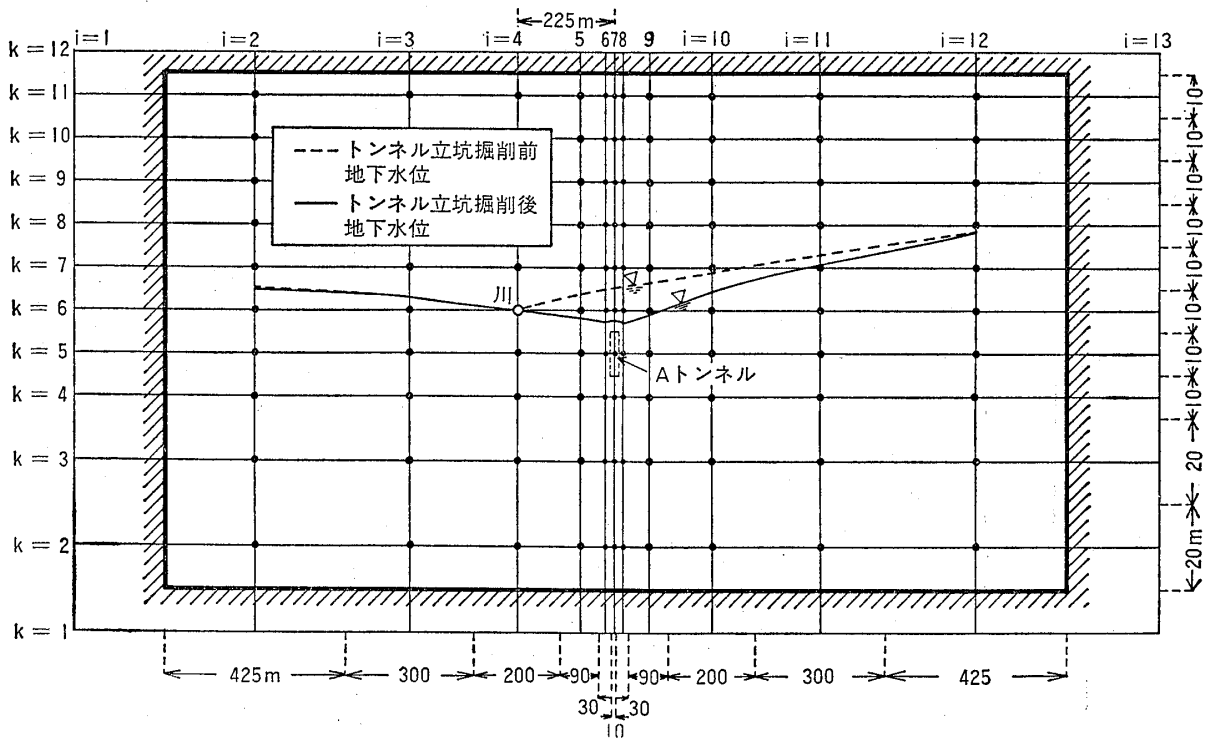


図-12 トンネル・立坑掘削による地下水位の低下 (J=5 断面図)

Fig. 12 Calculated groundwater levels after excavation of a Tunnel and a Shaft (J=5 Cross-section)

すように、トンネル・立坑の有無に関係なく10回で収斂している。したがって、ここでは20回の計算値が妥当な解と見なすことができよう。以上から本プログラムは、格子間隔が著しく変化した場合でも、適切な初期値を与えれば、満足すべき収斂性があると考えられる。

なお、図-11の水位の低下量は、掘削前と掘削後の  $k = 6$  面における圧力水頭値の差からもとめた。

(2) 非定常流の場合

(d) 非定常流の例として、被圧地下水帯において揚水を行うときに、地下水位の低下について計算を行った。

この計算に当っては、被圧水位の高さを帯水層の低部から10m、帯水層の厚さを5mとし、水平方向に広がっているものとした。

図-14は、この計算に用いたX方向の断面を示したもので、格子点数は  $i = 7, j = 7, k = 8$  で総計392点である。格子間隔は井戸を中心とし、X方向およびY方向ともに順次1m, 19m, 40m, 60m, Z方向は1mで等間隔に設定した。揚水井の大きさは一辺が1mの正方形とし、計算に当ってはつぎの数値を与えた。

貯留係数:  $S = 0.3$

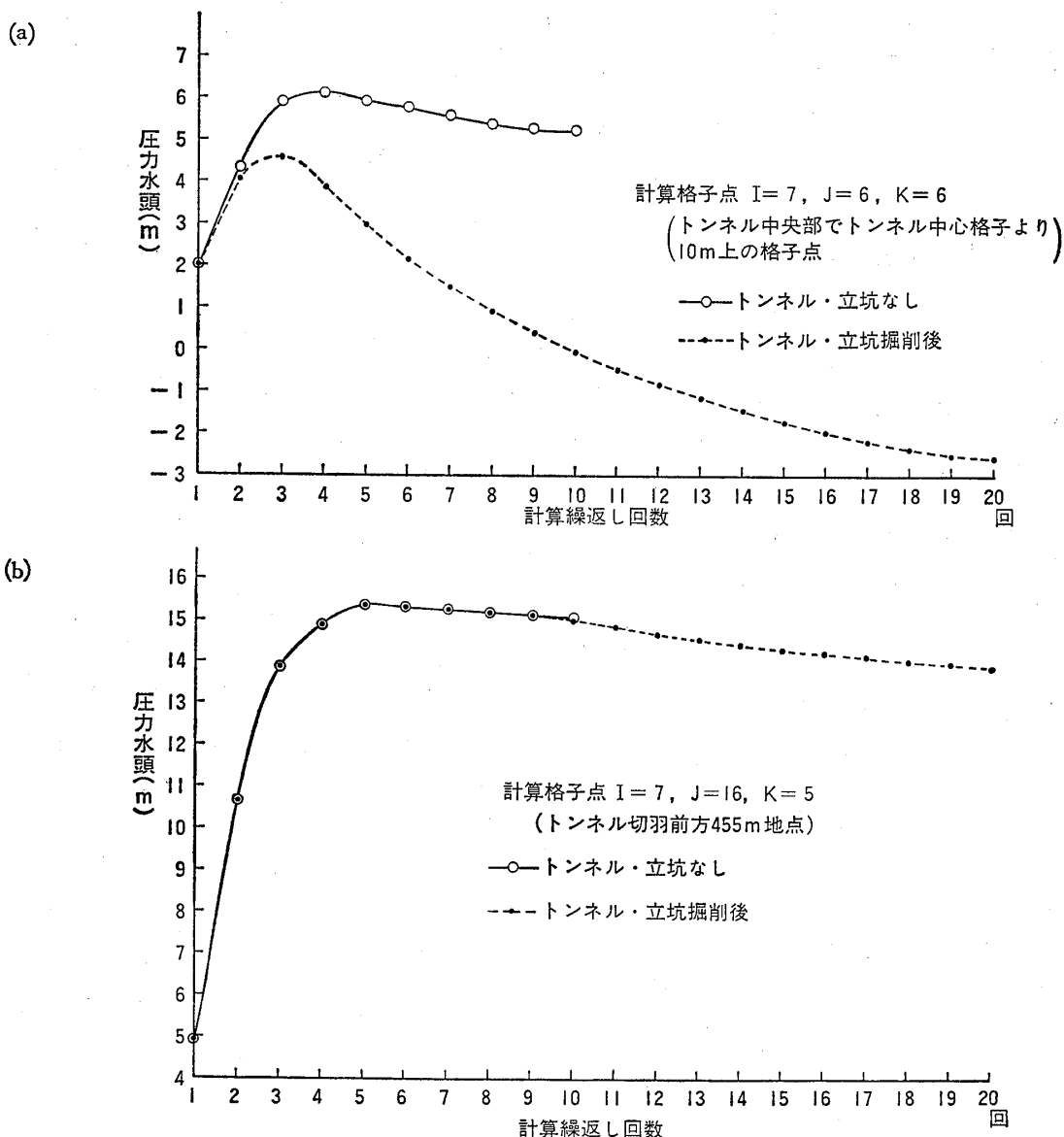


図-13(a) 計算値の収斂

Fig. 13(a) Convergency of a calculated value

図-13(b) 計算値の収斂

Fig. 13(b) Convergency of a calculated value

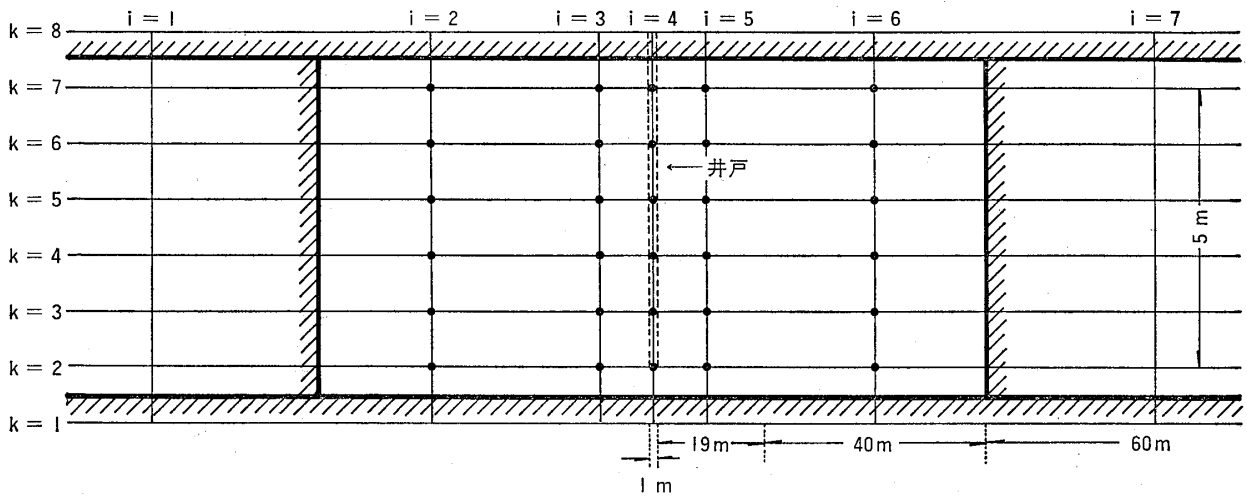


図-14 被圧地下水帯からの揚水モデル断面  
Fig. 14 Model cross-section of a fully penetrating artesian well

透水係数:  $K=1 \times 10^{-1} \text{cm/sec}$   
揚水量:  $Q=7.2 \text{m}^3/\text{h}$

このモデルにおいては、たとえば図-14に示すように、格子  $i=1$  と  $i=2$  との境界および  $i=6$  と  $i=7$  との境界に不透水の条件を与えることになるので、この境界条件の妥当性を Theis の理論から求めた水位低下量によって検討した。計算結果によると揚水開始後1時間の水位低下量は、井戸中心より半径10m ( $i=3$ あるいは  $i=5$ ) のところで0.021mであるが、半径39.5m ( $i$

$=2$  あるいは  $i=6$ ) のところでは0.000007mとなり、この距離においては水位低下はないと考えてよい。したがって、さきに述べた境界条件の設定は妥当といえる。そこで、三次元解析による揚水井中心から10mの距離にある点の、水位低下量  $S$  を時間  $t$  の関数として示すと、図-15の実線のようなになる。一方、帯水層が無限の広がりを持つとする Theis の理論値は、同図中の破線で示すようになり、計算値はこの理論値とほぼ等しい値を示していることから、非定常流についてもこのプログラムは有効である。

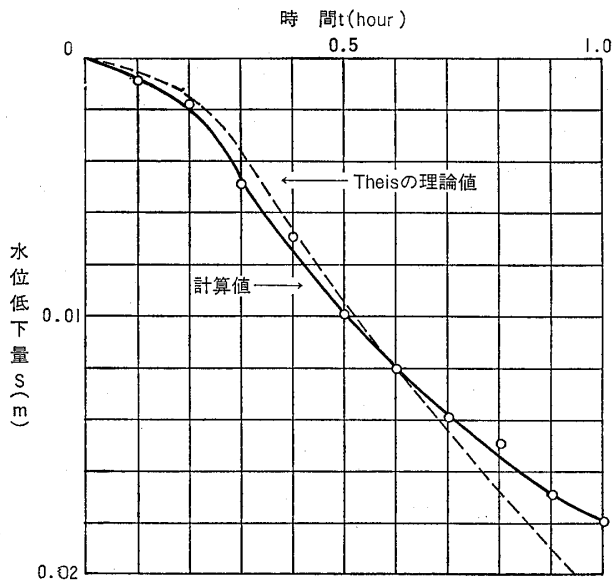


図-15 理論値と計算値の比較  
Fig. 15 Comparison between calculated and analytical results

5 河川水位変化に伴う地下水水位の変動

地下水水位の変動計算を行った地域は、図-16に示すように、A川の南側に広がる比較的平坦な三角形の氾濫平野で、この平野の西側と南側は山麓に囲まれており、東側は、A川の支流が北東に流下し、A川に合流している。計算に当っては、図-16に示すように、X方向(北→南)の格子間隔 $\Delta x$ を60m、Y方向(西→東)の格子間隔 $\Delta y$ を100m、また、Z方向の格子間隔 $\Delta z$ を3mとし、使用した格子点は  $i=22, j=21, k=12$  で、総計5544点である。したがって、計算の対象とした領域はX方向が1260m、Y方向が2000m、Z方向が33mとなる。また、地盤中の透水係数の分布をX方向(北→南)の代表断面 ( $j=7, j=11, j=15$ ) について示すと、図-17に示すとおりである。

計算に使用した水文資料は、つぎに示すものである。

- (a) A川の水位
- (b) 各戸の井戸揚水量
- (c) 水田からの供給量 = 減水深 - 蒸発量
- (d) 山麓からの地下水流入量  
= 年平均降水量 × 集水面積 × 地下水流出率
- (e) 降水量

モデル検定のために、以上のデータを該当格子点にインプットし、定常流として現状における水位の計算を行った。計算によって求められた地下水位の分布を示すと図-16のようになり、地下水位は比較的ゆるやかな勾配で右上方向に傾斜している。一方、図中に示す11本の井戸の地下水位の観測値と、さきの計算値とを比較すると、ほとんど一致しており、その差は最大でもNo.3の井戸の18cmであった。したがって、ここに採用したモデルは適切であるといえることができる。

そこで、想定河川水位の変化は、図-18に示すように  $j=6$  で  $-100\text{cm}$ 、 $j=9$  で  $-20\text{cm}$ 、 $j=11$  で  $-60\text{cm}$ 、 $j=14$  で  $+27\text{cm}$ 、 $j=15$  で  $+17\text{cm}$ 、 $j=16$  で  $+15\text{cm}$ 、 $j=19$  で  $-10\text{cm}$  とした。これらの条件を用いて計算された地下水位の分布を示すと図-18のようになる。また、河

川水位変化前後における地下水位の低下量分布は図-19に示すようになり、河川水位が  $100\text{cm}$  低くなる上流の川岸付近で  $100\text{cm}$  の最大低下量を示し、下流に向かうにしたがって低下量が少なくなり、 $j=13\sim 16$  付近では、河川水位が上昇することによって、地下水位が  $10\text{cm}$  上昇することになる。

### 6 地下水位の低下による地盤沈下

この解析の対象とした地域は、図-20に示すように、A町およびB町付近で3年間に  $30\text{cm}$  以上の沈下量を示す区域を含む地盤沈下の著しいところであり、多量の地下水の利用による地下水位の低下が、その原因として考えられている。

モデルの大きさは、X方向（北→南）の格子間隔  $\Delta x$  を  $6\text{km}$ 、Y方向（西→東）の格子間隔  $\Delta y$  を  $6\text{km}$ 、Z方向の格子間隔は、図-21に示すように、 $50\text{m}$ 、 $150\text{m}$ 、 $275\text{m}$  の3種とし、格子点数は、 $i=9$ 、 $j=8$ 、 $k=10$  で、総計  $720$  点である。

また、地盤中の透水係数の分布は、既存資料を参考に

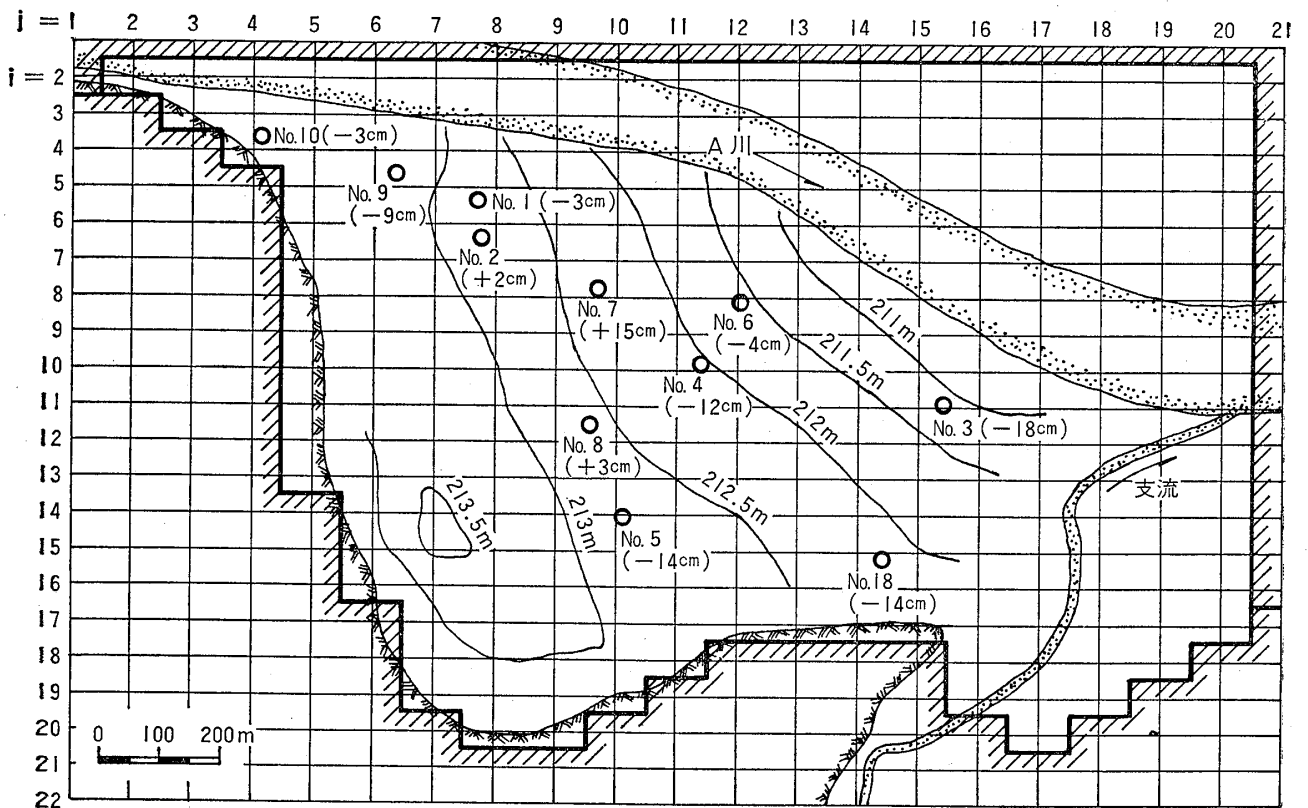


図-16 河川水位変化前の計算地下水位

Fig. 16 Calculated groundwater levels before river level change

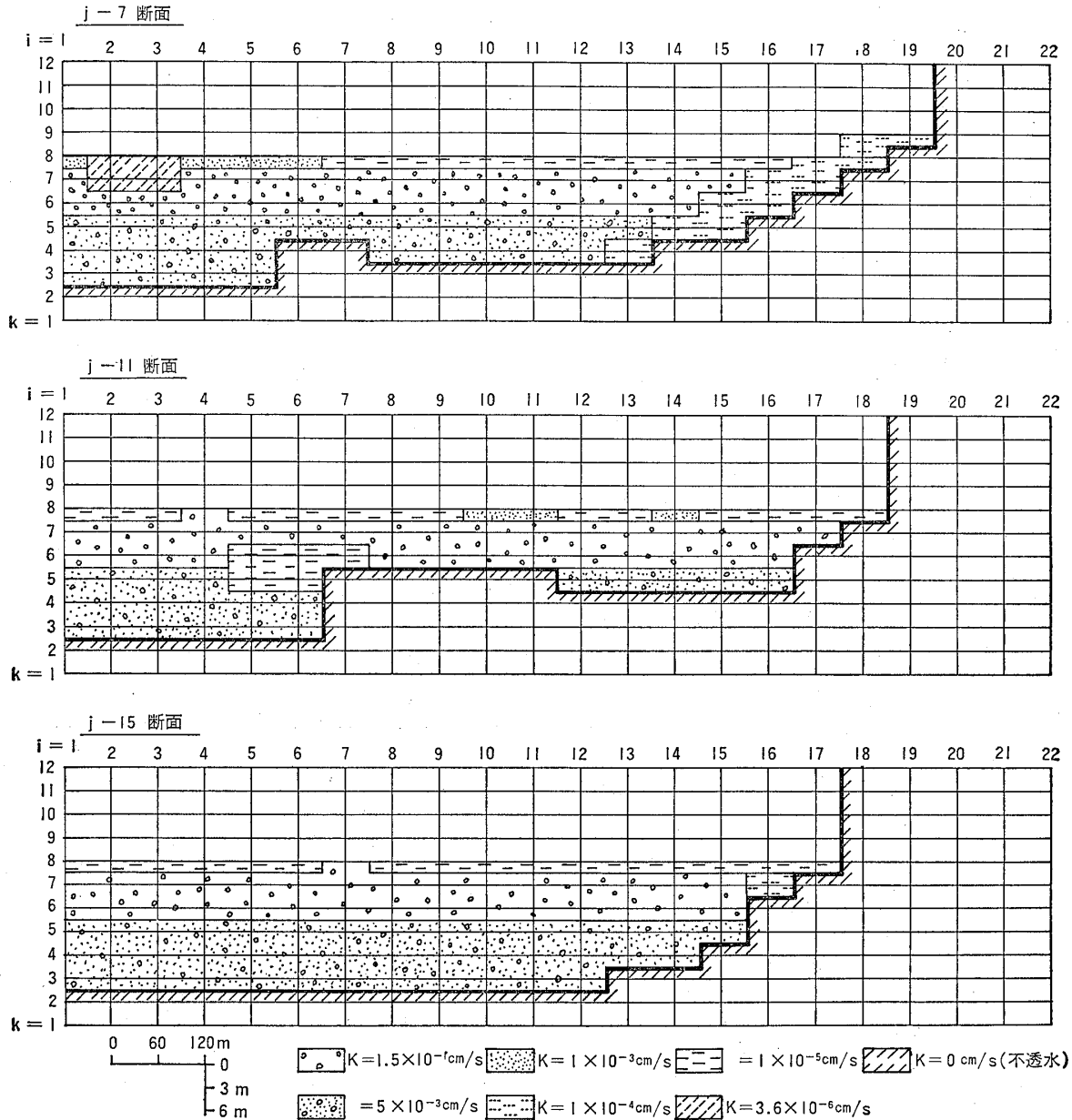


図-17 地盤中の透水係数分布  
 Fig. 17 Variations of coefficients of permeability in the ground

して作成した。モデルの1例を図-21に示す。

この計算に当っては、地下水の吸み上げが地盤の沈下に与える影響の概略を知ることが目的としているために、降雨量、蒸発量は考慮しないこととし、また、揚水量としては、その大部分を占めている水道および工業用の揚水量のみを入力することにした。図-22は、当地域における昭和52年の揚水量とその分布を示したものである。この揚水量ならびに周辺境界の水位を入力して地下水位を計算した。図-23はモデルの検定結果である。この検定については、既存の水文資料の粗密さや、水収支

に関する単純化した仮定などに起因するものと思われるが、できるだけ同図に示してある観測水位と一致するように、周辺の境界条件を変化させて試算した。

そこで、図-23に示すモデルを使用し、昭和55年の揚水量としては、昭和52年の揚水量の10%増として地下水位の計算を行った。そして、昭和52年の計算地下水位と昭和55年の計算地下水位の差から、この3年間の地下水位の低下量を求めると、図-24のようになる。

この水位の低下量を増加荷重とみなし、この増加荷重に対する沈下量を、Terzaghiの一次元圧密理論式



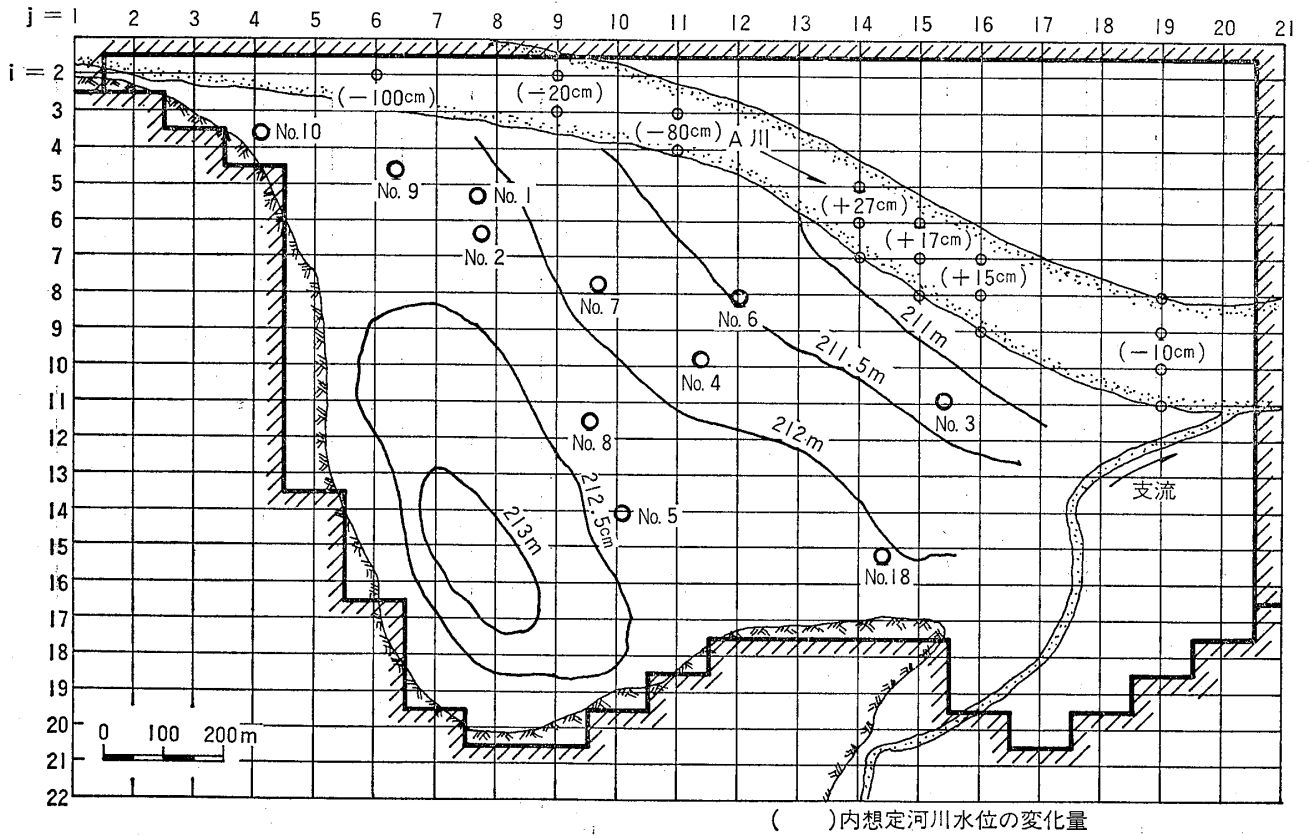


図-18 河川水位変化後の計算地下水位  
 Fig. 18 Calculated groundwater levels after river level change

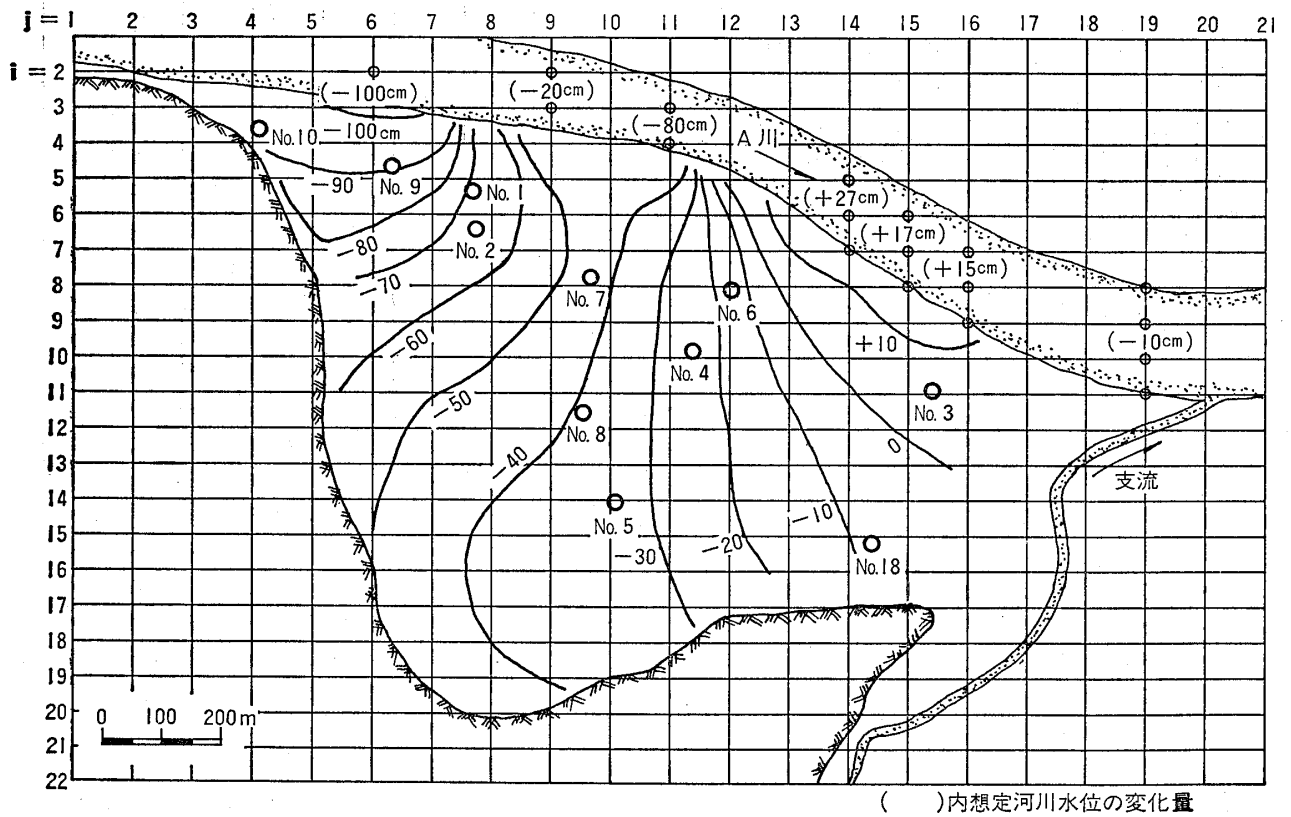


図-19 河川水位変化後の計算地下水位変化量  $\Delta H$   
 Fig. 19 Calculated change of groundwater levels  $\Delta H$  after river level change.

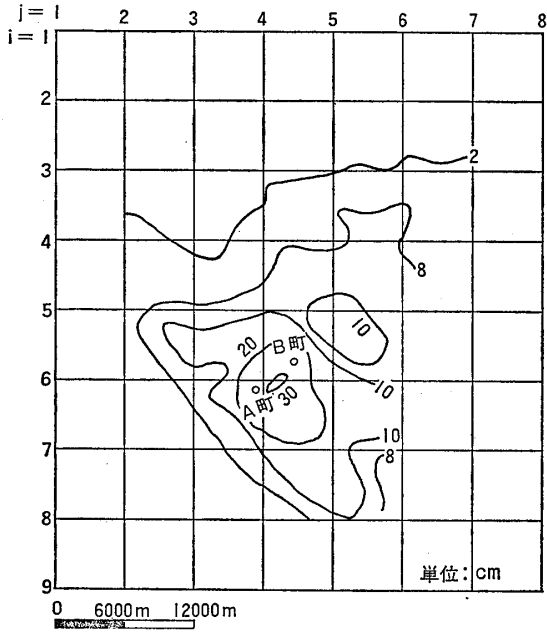


図-20 沈下解析対象地域

Fig. 20 Model of study areas where ground settled remarkably

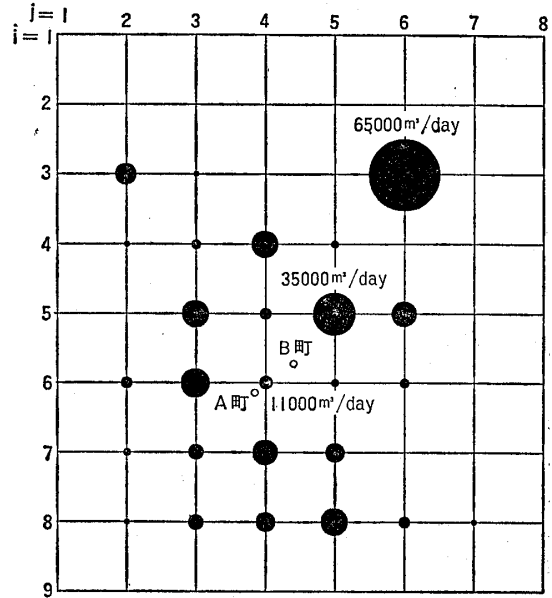


図-22 揚水量分布 (昭和52年)

Fig. 22 Locations of pumping and pumping records (during 1977)

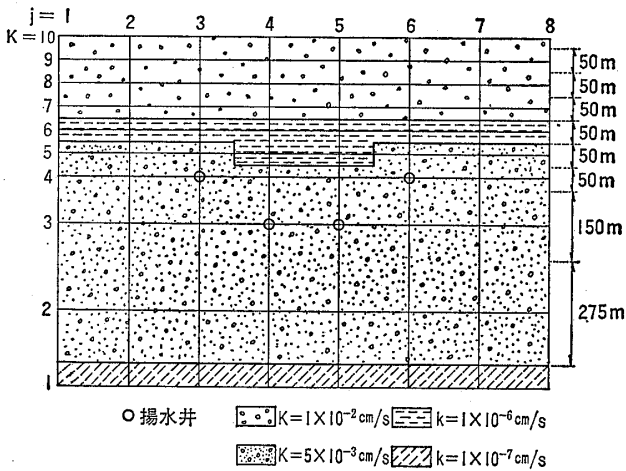


図-21 地盤中の透水系数分布

Fig. 21 Variations of coefficients of permeability in the ground

$$S = \sum_{i=1}^n m_{vi} \cdot h_i \cdot \Delta p_i \quad (15)$$

S : 沈下量

$m_{vi}$  : i 層の体積圧縮係数

$h_i$  : i 層の層厚

$\Delta p_i$  : i 層の増加荷重

によって求めると、図-25に示す実線のようになる。また、この図中には、図-20に示した3年間の観測沈下量を破線で示してある。これによると、昭和52年から昭和

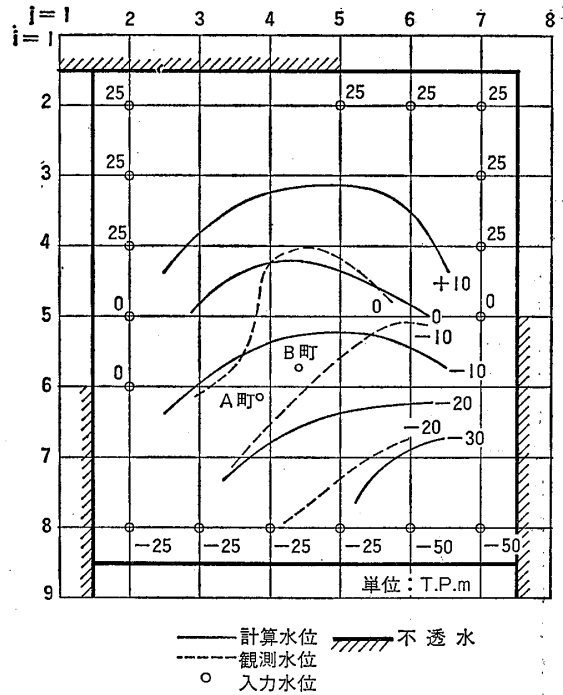


図-23 計算地下水水位と観測地下水水位 (昭和52年)

Fig. 23 Calculated and actual groundwater levels (1977)

55年にわたる3年間の沈下量の計算値は、実際に観測された値と若干の相異がみられ、計算値では、沈下量30cm以上の区域が6kmほど北方にあり、また、沈下量20cm以上の区域が北の方へ広がって、その面積も2倍以上にな

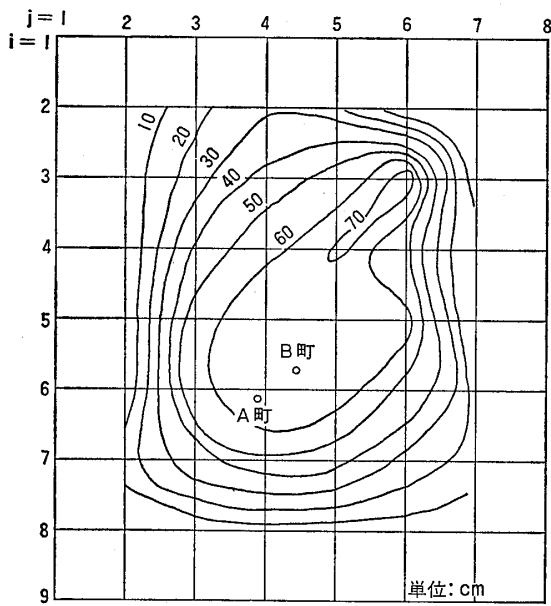


図-24 計算地下水位の変化量分布  
(昭和52~昭和55年)

Fig. 24 Calculated change in groundwater levels (during 1957-1960)

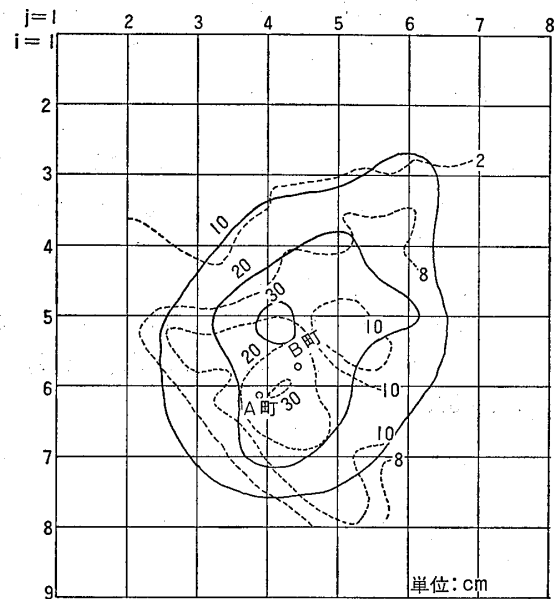
っている。このような相異点の原因は、既存の水文資料の不備、水収支に関する仮定、とくに昭和55年における揚水量の設定など、入力データの不正確性によるものと考えられる。しかしながら、大局的に見れば、沈下量の分布傾向は観測結果と同じ様相にあるとみて差支えないと考えられる。ここでは、将来への予測は行っていないが、入力データの確度を高めること、また、それに相応する格子間隔を設定することによって、この種の問題に対しても、この報文に述べた解析法は十分実用性を有するものと考えられる。

参 考 文 献

J. D. Bredehoeft and G. F. Pinder (1970) : Digital Analysis of Areal Flow in Multiaquifer Groundwater Systems : A Quasi Three-Dimensional Model, Water Resources Research, Vol. 6, No 3, pp. 883-888

岡 太郎 (1971) : 自由水面を有する浸透流の三次元解析手法とその考察—河川構造物の浸透問題(3)—, 京大防災研究所年報第14号B(昭. 46. 4), pp. 167-178

岡 太郎 (1971) : 自由水面を有する浸透流の三次元解析法の適用例とその考察—河川構造物の浸透問題



——計算値 - - - - -観測値

図-25 計算地盤沈下量と観測地盤沈下量  
(昭和52年~昭和55年)

Fig. 25 Calculated and actual settlements (during 1957-1960)

(4)一, 京大防災研究所年報第14号B(昭. 46. 4), pp. 179-187

Freeze, R. A. (1971) : Three-Dimensional, Transient, Saturated-Unsaturated Flow in a Groundwater Basin, Water Resour. Res., Vol. 7, No. 2, pp. 347-366

大西有三 (1981) : 土中水の不飽和流動3. 不飽和流の解析(解析例), 土と基礎, Vol. 29, No. 8, pp. 38-39

Sego, G. (1976) : Three-Dimensional Galerkin Finite Element Model of the Analysis of Contaminant Transport in Saturated-Unsaturated Porous Media, Int'l Conf. on Finite Elements in Water Resources, N. S. F., Princeton., pp. 123-145

Frind, E. O. and Verge, M. J. (1978) : Three-Dimensional Modeling of Groudwater Flow Systems, Water Resour. Res., Vol. 14, No. 5, pp. 844-856

駒田広也・大町達夫 (1978) : フィルダムの三次元浸透流解析, 大ダム, No. 86, pp. 1-15

Akai, K., Ohnishi, Y. and Nishigaki, M. (1979) : Finite Element Analysis of Three-Dimensional Flows in Saturated-Unsaturated Soil, 3rd Int'l Conf. on Numerical Methods in Geomech., Aachen.

- Freeze, R. A. (1972) : A Physics-Based Approach to Hydrologic Response Modeling : Phase I : Model Development (1972), IBM Watson Research Center, Prepared for Office of Water Resources Research pp. 11—12
- Jacob, C. E. (1940) : The Flow of Water in an Elastic Artesian Aquifer, Trans. Amer. Geophys. Union, Part 2, pp. 574—586
- Richards, L. A., (1931) : Capillary Conduction of Liquids through Porous Mediums, Physics, 1, pp. 318—333