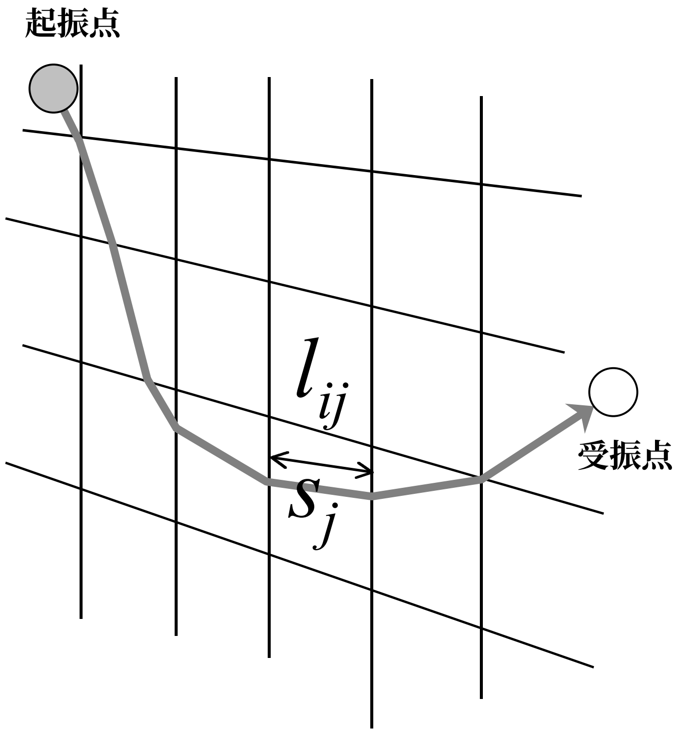
SeisImager/2D

資料⑤

トモグラフィ解析の基礎

- トモグラフィ的解析とは？
- 最小二乗法
- 非線形最小二乗法
- SIRT
- パス計算

トモグラフィ解析
(波線と走時の離散化表現)



$$s = \frac{1}{u}$$

υ:速度
s:スローネス

$$t_i = \int_X \frac{dX}{\mathbf{u}(X)} = \int_X s(X)\,dX$$

↓ 離散化

$$t_i = s_1 l_{i1} + s_2 l_{i2} + s_3 l_{i3} + s_4 l_{i4} + \cdots + s_N l_{iN}$$

↓

$$t_i = \sum_{j=1}^{N} s_j l_{ij}$$

トモグラフィ的解析

M個の連立一次方程式（M個の走時、N個の未知数）

$$t_1 = l_{11}s_1 + l_{12}s_2 + \cdots + l_{1N}s_N$$
$$t_2 = l_{21}s_1 + l_{22}s_2 + \cdots + l_{2N}s_N$$
$$t_3 = l_{31}s_1 + l_{32}s_2 + \cdots + l_{3N}s_N$$
$$\vdots$$
$$t_M = l_{M1}s_1 + l_{M2}s_2 + \cdots + l_{MN}s_N$$

行列表現

$$LS = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdot & l_{1N} \\ l_{21} & l_{22} & \cdot & l_{2N} \\ l_{31} & l_{32} & \cdot & l_{3N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{M1} & l_{M2} & \cdot & l_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ s_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ t_M \end{pmatrix} = T \longrightarrow$$

波線経路　モデル　走時

最小二乗法

一般に　M＞N

最小二乗法の基礎

連立方程式（Q1）

$$2x_1 + x_2 = 11$$

$$4x_1 + x_2 = 17$$

$$6x_1 + x_2 = 23$$

2個の未知数に対して3個のデータ

行列表現

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix} = Y$$

ポイント！

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(6x_1 + x_2 - 23\right) = 6}$$

$$AX = Y$$

行列A（Jacobian行列）

$$f_1 = 2x_1 + x_2 - 11$$
$$f_2 = 4x_1 + x_2 - 17$$
$$f_3 = 6x_1 + x_2 - 23$$

$$\downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

残差行列：e

$$e = AX - Y$$

残差の二乗和を最小に

$$E = (AX - Y)^T (AX - Y) = \|AX - Y\|^2 \Rightarrow Minimize$$

Eの微分を０にする

$$\frac{dE}{dX} = 2A^T (AX - Y) = 0$$

この式をXについて解く

$$\boxed{(A^T A) X = A^T Y}$$

正規方程式

計算例 (Q1)

$$2x_1 + x_2 = 11$$
$$4x_1 + x_2 = 17$$
$$6x_1 + x_2 = 23$$

$$\downarrow$$

$$\left(A^T A\right)X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix} = A^T Y$$

$$\downarrow$$

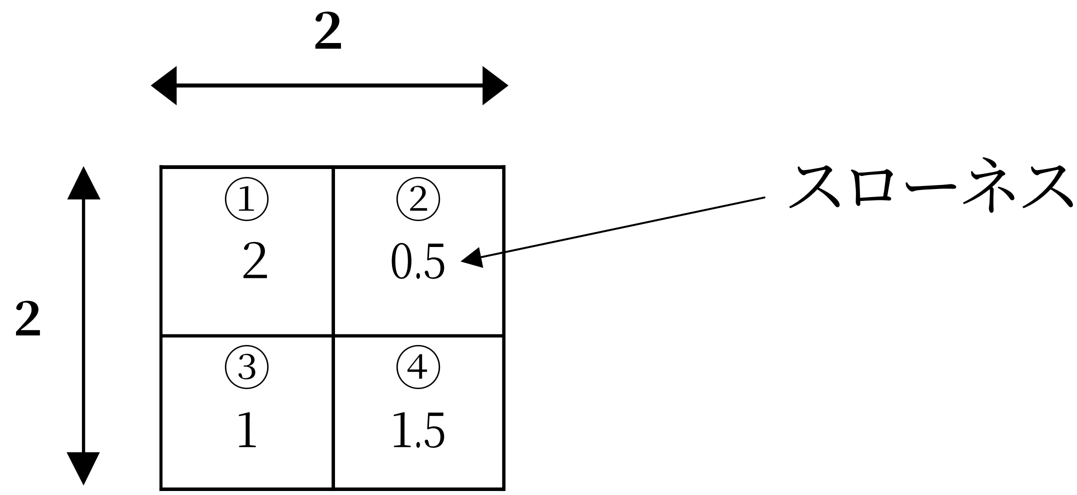
$$\left(A^T A\right)X = \begin{pmatrix} 56 & 12 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 228 \\ 51 \end{pmatrix} = A^T Y$$ 正規方程式

$$\downarrow$$

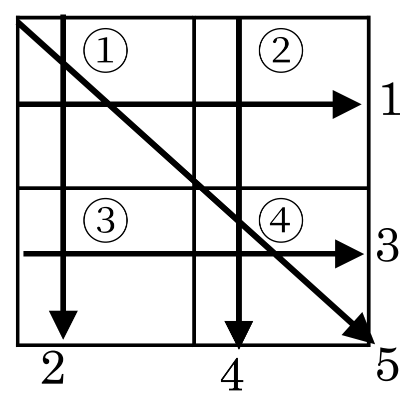
$$X = \left(A^T A\right)^{-1} A^T Y = \begin{pmatrix} 0.125 & -0.5 \\ -0.5 & 2.3333 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 228 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

走時トモグラフィの計算例 (Q2)

4個のセル



5本の波線



観測走時

$$T=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+0.5 \\ 2+1 \\ 1+1.5 \\ 0.5+1.5 \\ 2\sqrt{2}+1.5\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 2.5 \\ 2 \\ 4.949747 \end{pmatrix}$$

Jacobian行列A（各セルを通過した波線の長さ）

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{gathered} t_i = s_1 l_{i1} + s_2 l_{i2} + s_3 l_{i3} + s_4 l_{i4} + \cdots + s_N l_{iN} \\ \frac{\partial t_i}{\partial s_j} = l_{ij} \end{gathered}}$$

解くべき連立方程式は

$$LS=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 2.5 \\ 2 \\ 4.949747 \end{pmatrix}=T$$

正規方程式

$$L^T LS = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5 \\ 4.5 \\ 5.5 \\ 11.5 \end{pmatrix} = L^T T$$

これを解いて…

$$S^T = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

非線形問題

↓

Jacobian行列を作るには波線経路が必要

↓

速度構造がわからなければ波線は計算できない！

↓

１回で解くことは不可能

↓

非線形最小二乗法

非線形最小二乗法

Jacobian行列が定数とならない場合

$$y(Z) = x_1 Z - x_2 e^{-Z x_3}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y(z_m)}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_m)}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_m)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & -e^{-Z_1 x_3} & -x_2 Z_1 e^{-Z_1 x_3} \\ z_2 & -e^{-Z_2 x_3} & -x_2 Z_2 e^{-Z_2 x_3} \\ & & \\ z_m & -e^{-Z_m x_3} & -x_2 Z_m e^{-Z_m x_3} \end{pmatrix}$$

行列Aの中に求めるパラメータ (x) が入ってしまう！

非線形最小二乗法の逐次解法

①初期値X_0に対して理論値Y_0を計算

$$Y_0(Z) = Y(Z, X_0)$$

②理論値Y_0と観測値Yの残差（ΔY）を計算

$$\Delta Y = Y - Y_0$$

③Xの修正量ΔXを最小二乗法により計算

$$(A^T A)\Delta X = A^T \Delta Y$$

④新しい推定値X_1を求める

$$X_1 = X_0 + \Delta X$$

⑤①に戻る

⑥残差が十分小さくなったら終了

計算例 (Q3)

モデル

$$y(Z) = x_1 Z - x_2 e^{-Z x_3}$$

正しい値 (答)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11個の観測データ

z	y(z)
0	-2
1	0.264241
2	1.729329
3	2.900426
4	3.963369
5	4.986524
6	5.995042
7	6.998176
8	7.999329
9	8.999753
10	9.999909

偏微分 $$\frac{\partial y}{\partial x_1}=Z \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2}=-e^{-Zx_3} \qquad \frac{\partial y}{\partial x_3}=x_2 Z e^{-Zx_3}$$

初期モデル $$X_0=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jacobian行列A

$$A_0=\begin{pmatrix} \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y(z_{11})}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_{11})}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_{11})}{\partial x_3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1 & -e^{-Z_1 x_3} & -x_2 Z_1 e^{-Z_1 x_3} \\ z_2 & -e^{-Z_2 x_3} & -x_2 Z_2 e^{-Z_2 x_3} \\ & & \\ z_{11} & -e^{-Z_{11} x_3} & -x_2 Z_{11} e^{-Z_{11} x_3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -0.1353352832 & 0.4060058497 \\ 2 & -0.0183156389 & 0.1098938333 \\ 3 & -0.0024787522 & 0.0223087696 \\ 4 & -0.0003354626 & 0.0040255515 \\ 5 & -0.0000453999 & 0.0006809989 \\ 6 & -0.0000061442 & 0.0001105958 \\ 7 & -0.0000008315 & 0.0000174621 \\ 8 & -0.0000001125 & 0.0000027008 \\ 9 & -0.0000000152 & 0.0000004112 \\ 10 & -0.0000000021 & 0.0000000618 \end{pmatrix}$$

観測値

$$Y^T = (-2.0000 \quad 0.264241 \quad 1.729329 \quad 2.900426 \quad 3.963369 \quad 4.986524 \quad 5.995042 \quad 6.998176 \quad 7.999329 \quad 8.999753 \quad 9.999909)$$

初期モデルに対する理論値

$$Y_0^T = (-3.0000 \quad 1.5940 \quad 3.9451 \quad 5.9926 \quad 7.9990 \quad 9.9999 \quad 12.0000 \quad 14.0000 \quad 16.0000 \quad 18.0000 \quad 20.0000)$$

残差ベクトル　$\Delta Y = Y_0 - Y$

$$\Delta Y_0^T = (-1.0000 \quad 1.3298 \quad 2.2157 \quad 3.0921 \quad 4.0356 \quad 5.0133 \quad 6.0049 \quad 7.0018 \quad 8.0007 \quad 9.0002 \quad 10.0001)$$

RMSE（Root Mean Square Error）

$$RMSE_0 = \sqrt{\frac{\Delta Y_0^T \Delta Y_0}{11}} = 5.9449$$

$$A_0^T A_0 = \begin{pmatrix} 385 & -0.181 & 0.71304 \\ -0.181 & 1.0187 & -0.057 \\ 0.71304 & -0.057 & 0.17743 \end{pmatrix} \qquad A_0^T \Delta Y_0 = \begin{pmatrix} 386.3 \\ 0.7702 \\ 0.8728 \end{pmatrix}$$

$\left(A_0^T A_0\right)\Delta X_0 = A_0^T \Delta Y_0$ を解いて $\Delta X_0 = \begin{pmatrix} 1.0016 \\ 1.0021 \\ 1.2162 \end{pmatrix}$

Xの新しい推定値X_1は $X_1 = X_0 - \Delta X$ より

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.0016 \\ 1.0021 \\ 1.2162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9984 \\ 1.9979 \\ 0.7838 \end{pmatrix}$$

Xの新しい推定値X_1を用いて残差(RMSE)を計算すると

$$RMSE_1 = \sqrt{\frac{\Delta Y_1^T \Delta Y_1}{11}} = 0.0793$$

2回目の計算では

$$A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} 385 & -1.543 & 8.19332 \\ -1.543 & 1.2635 & -0.6652 \\ 8.19332 & -0.6652 & 2.02955 \end{pmatrix} \quad A_1^T \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} -1.854 \\ 0.123 \\ -0.372 \end{pmatrix}$$

修正値は　　　　　修正したモデルは

$$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.002 \\ -0.179 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0.9984 \\ 1.9979 \\ 0.7838 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.002 \\ -0.179 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ 1.9959 \\ 0.9625 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

残差は

$$RMSE_2 = \sqrt{\frac{\Delta Y_2^T \Delta Y_2}{11}} = 0.0122 \cong 0$$

走時トモグラフィの場合

連立方程式 $$LS = T$$

現実にはLはSの関数 $$L(S)S = T \longrightarrow \text{非線型問題}$$

初期モデル $$S_0 \xrightarrow{\text{パス計算}} L_0$$

Jacobian行列Lは
波線経路である！

$$S_0 \longrightarrow T_0^c$$ 理論走時

つまり

$$\Delta T_0 = T^O - T_0^C = T^O - L_0 S_0$$

修正値を求めて

$$L_0 \Delta S_0 = \Delta T_0$$

モデルを修正

$$S_1 = S_0 + \Delta S_0$$

K回目のイタレーションでは

$$\Delta T_k = T^O - T_k^C = T^O - L_k S_k$$

$$L_k \Delta S_k = \Delta T_k$$

$$S_{k+1} = S_k + \Delta S_k$$

連立方程式を簡単に解く（SIRT）

対角成分だけを用いる

$$L^T L \Delta S = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} l_{i1}^2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} l_{i2}^2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \sum_{i=1}^{n} l_{im}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \cdot \\ \Delta s_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i l_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i l_{i2} \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i l_{im} \end{pmatrix} = L^T \Delta T$$

$$\Delta s_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i l_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} l_{ij}^2} \cdot a \cong \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta t_i \dfrac{l_{ij}}{L_i} \right)}{\sum_{i=1}^{n} l_{ij}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta t_i \dfrac{t_{ij}}{T_i^c} \right)}{\sum_{i=1}^{n} l_{ij}}$$

$$L_i = \sum_{j=1}^{m} l_{ij}$$

$$T_i = \sum_{j=1}^{m} t_{ij}$$

SIRTの計算例 (Q4)

Q2より

$$LS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 2.5 \\ 2 \\ 4.949747 \end{pmatrix} = T$$

初期値

$$S_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

残差の計算

$$\Delta T_0 = T - T_0^c = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 2.5 \\ 2 \\ 4.9497 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2.8284 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 2.1213 \end{pmatrix}$$

RMSE

$$RMSE_0 = \sqrt{\frac{\Delta T^T \Delta T}{5}} = 2.44949$$

例えば1番目のセルでは

$$\Delta s_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta t_i / L_i\right) l_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} l_{ij}} = \frac{\frac{1}{2}\times 0.5 + \frac{1}{2}\times 1 + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\times 2.1213}{1+1+\sqrt{2}} = 0.53033$$

同様に

$$S_1 = S_0 + \Delta S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.53033 \\ 0.125 \\ 0.375 \\ 0.383883 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.53033 \\ 1.125 \\ 1.375 \\ 1.383883 \end{pmatrix}$$

正規方程式を計算しなくてよい

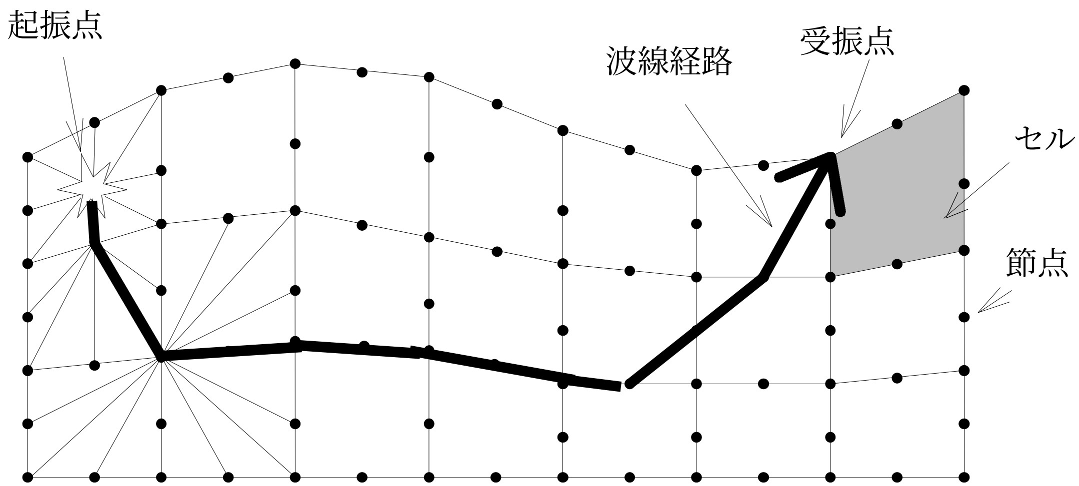
2回目は

$$\Delta T_1 = T - T_1^c = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 2.5 \\ 2 \\ 4.9497 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.65533 \\ 2.90533 \\ 2.75888 \\ 2.50888 \\ 4.12132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1553 \\ 0.09467 \\ -0.2589 \\ -0.5089 \\ 0.82843 \end{pmatrix}$$

RMSE

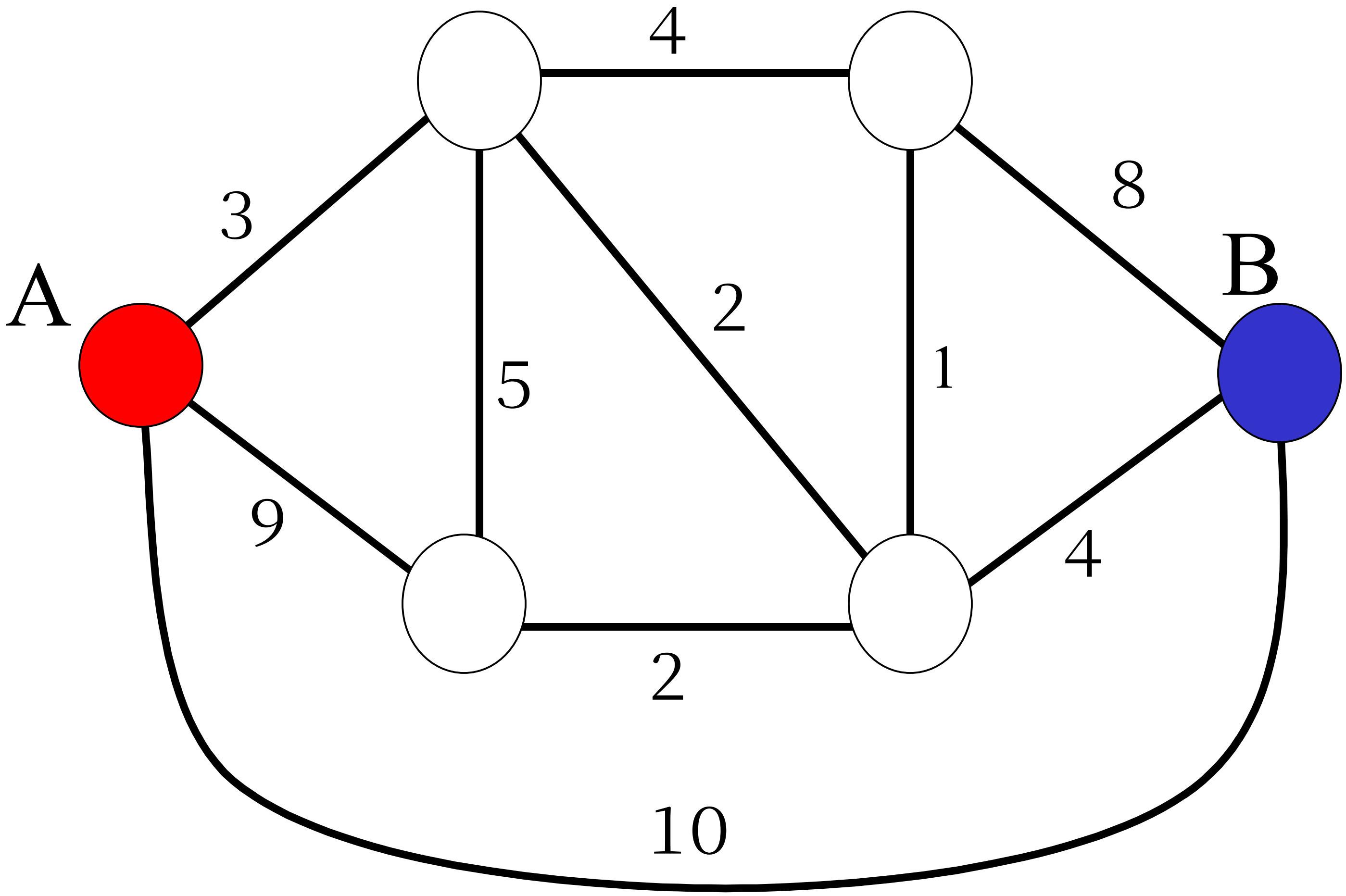
$$RMSE_1 = \sqrt{\frac{\Delta T^T \Delta T}{5}} = 1.02243$$

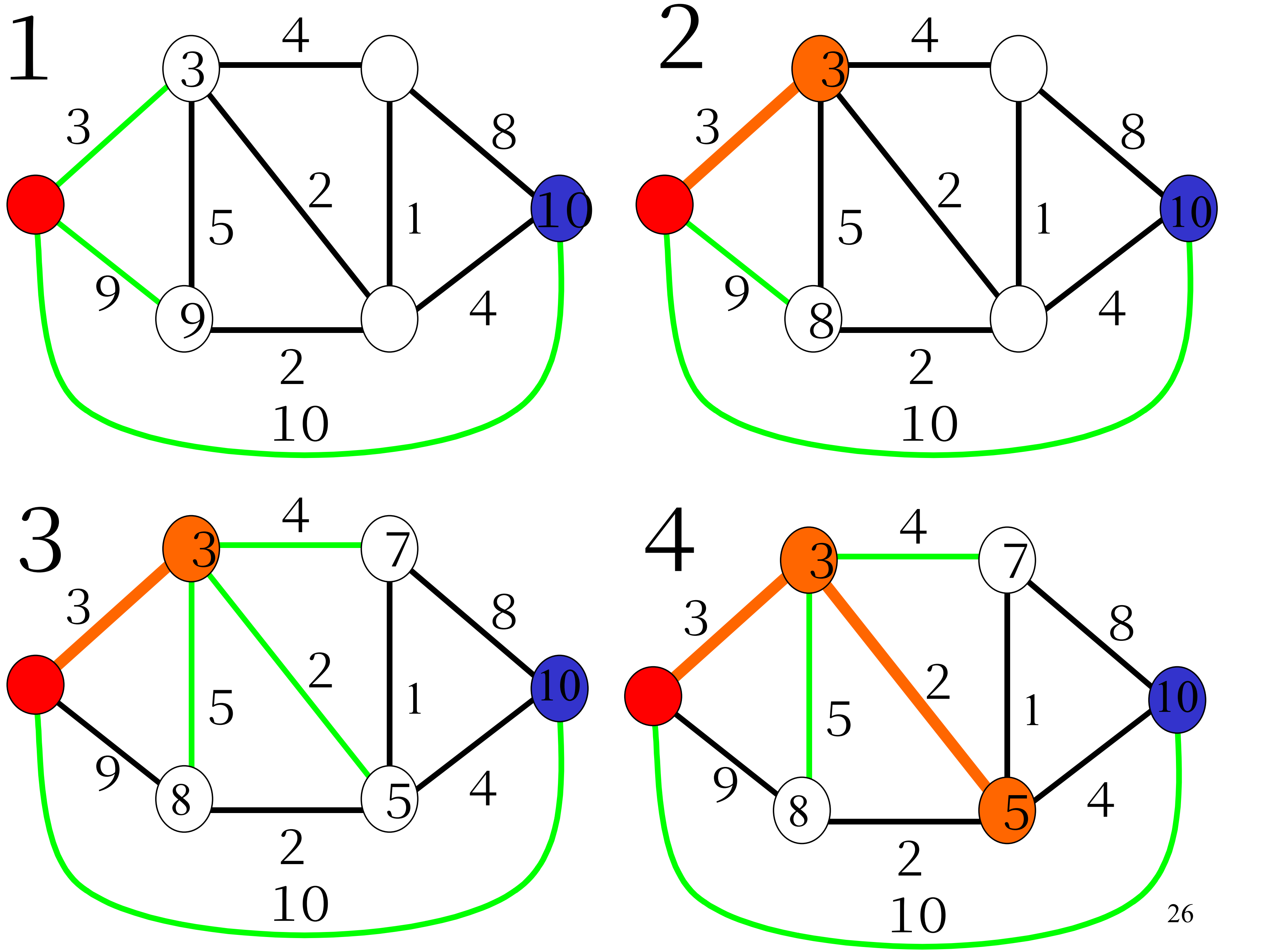
コンピューターによる
理論走時計算（パス計算）



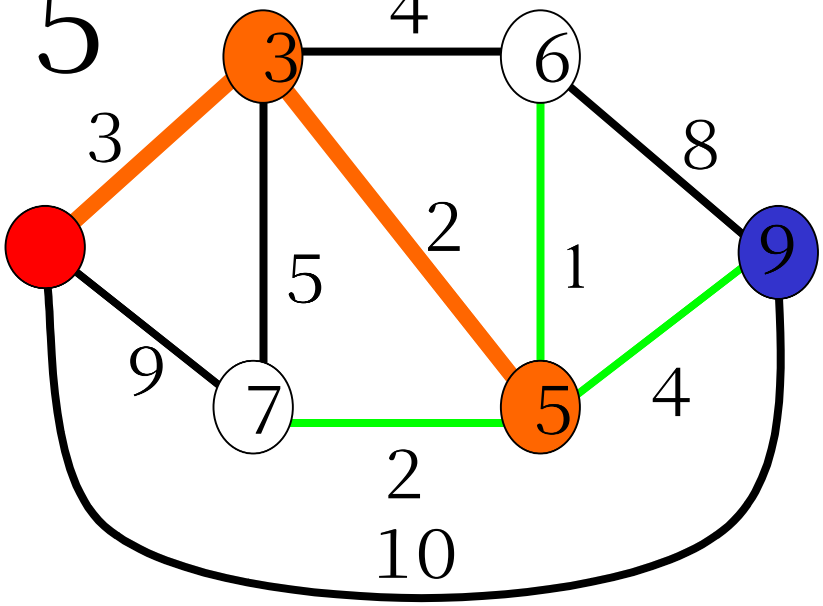
●速度構造モデルを複数の四辺形（セル）に近似する。各セル内の弾性波速度は一定とする。
●各セルの周辺上（速度境界線上）に複数（8～36個）の節点を設定する。
●起振点から射出された波線は、これらの節点間をたどるものとする。
●起振点－受振点間の初動走時は、これらの節点をたどる経路のうち最も走時の短い経路の走時とする。
●複数の同一速度セルを通過する波線は、その同一速度セル内は直線で計算できる。

AからBへの最短経路の検索



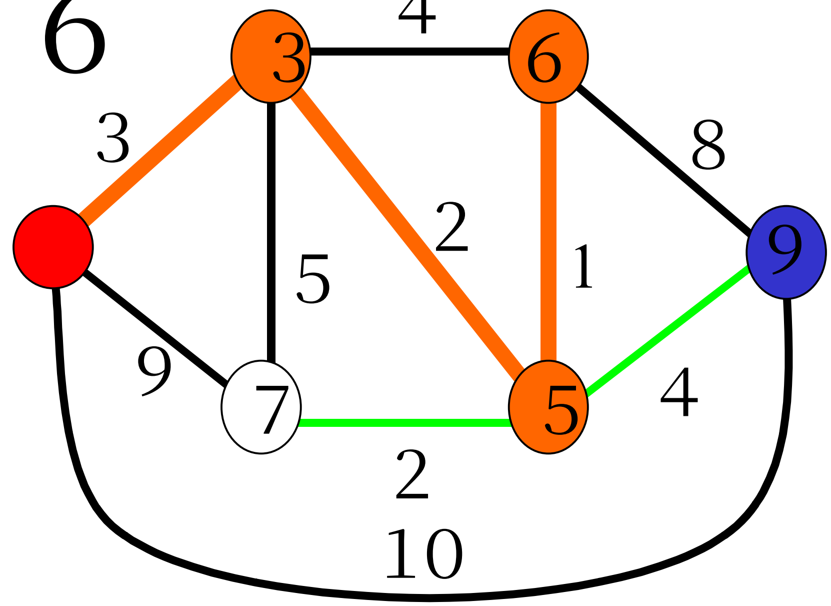

1
3
4
3
8
2
5
1
10
9
9
4
2
10
2
3
4
3
8
2
5
1
10
9
8
4
2
10
3
3
4
7
3
8
2
5
1
10
9
8
5
4
2
10
4
3
4
7
3
8
2
5
1
10
9
8
5
4
2
10

5



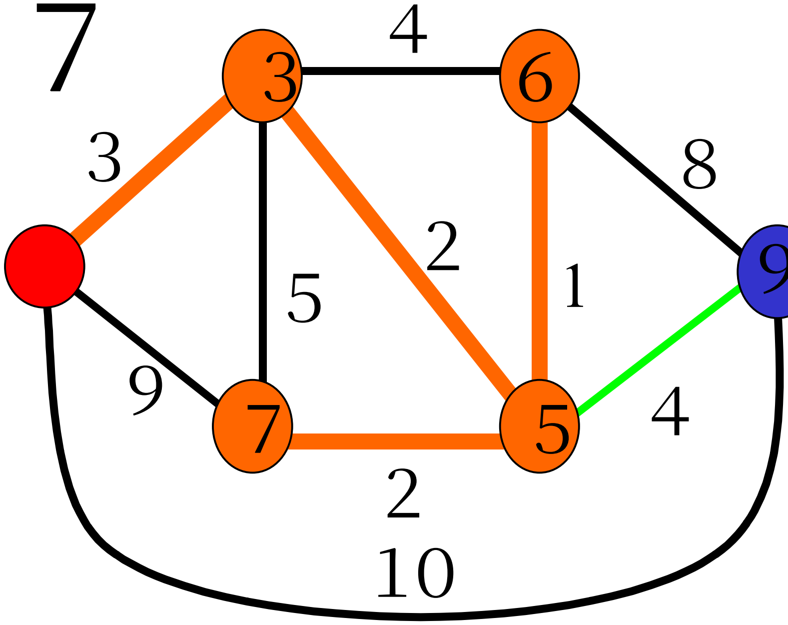
3
6
9
7
5
4
3
2
1
8
5
9
4
2
10

6



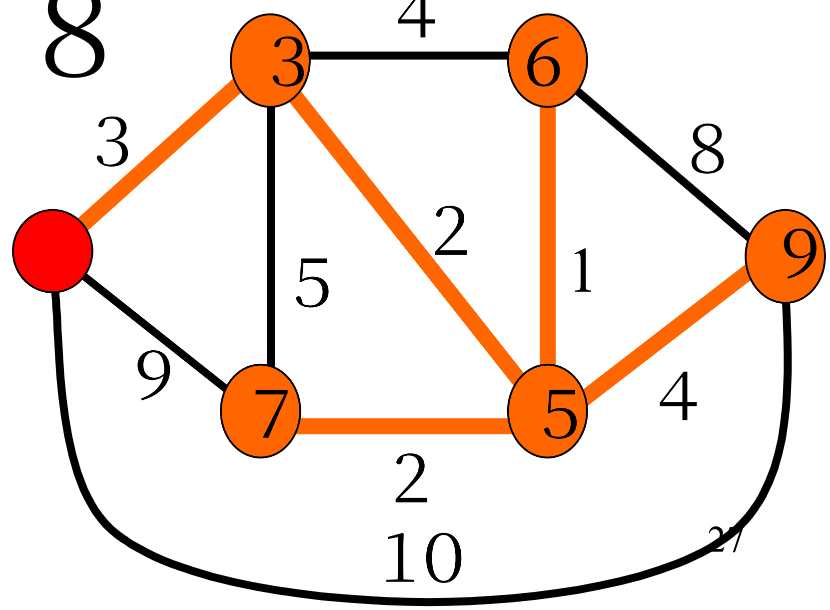
3
6
9
7
5
4
3
2
1
8
5
9
4
2
10

7



3
6
9
7
5
4
3
2
1
8
5
9
4
2
10

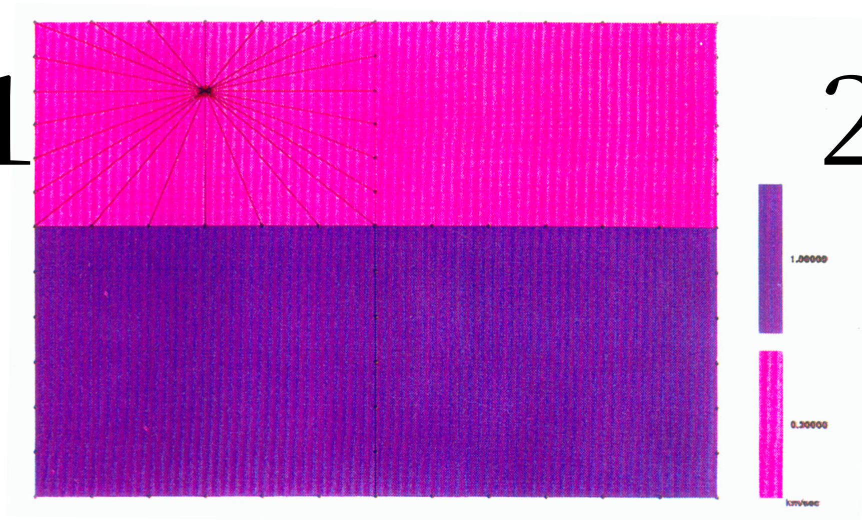
8



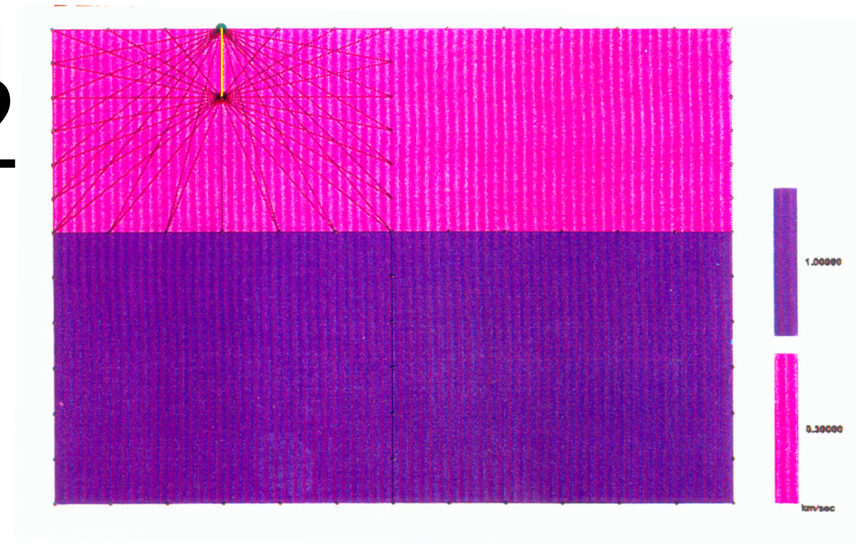
3
6
9
7
5
4
3
2
1
8
5
9
4
2
10

波線の計算例 (1)

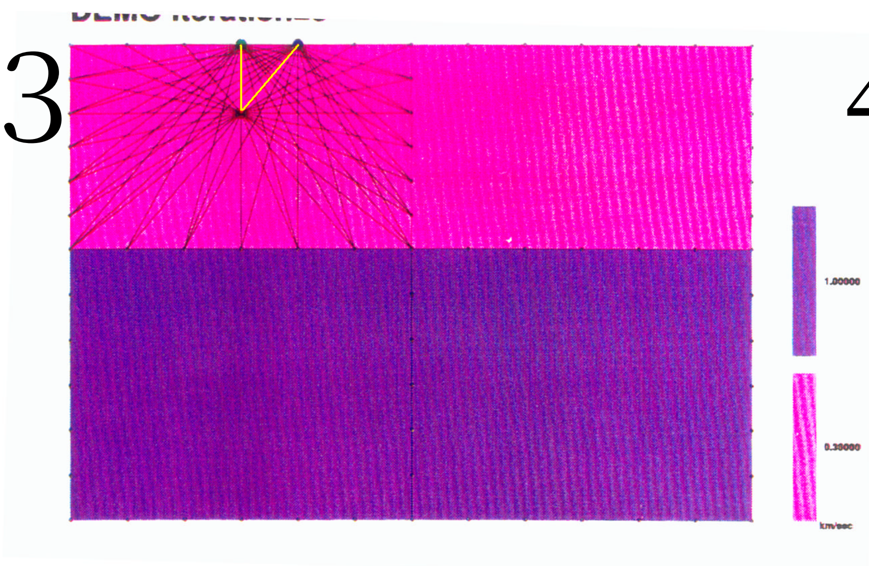
1



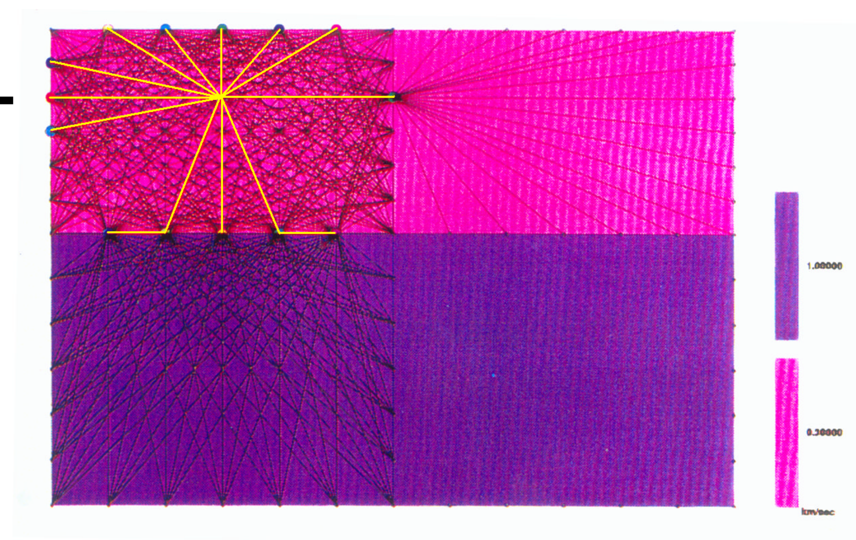
2



3

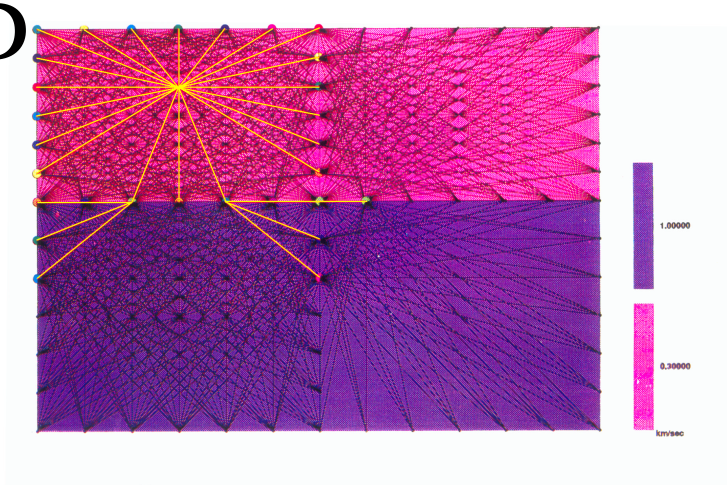


4

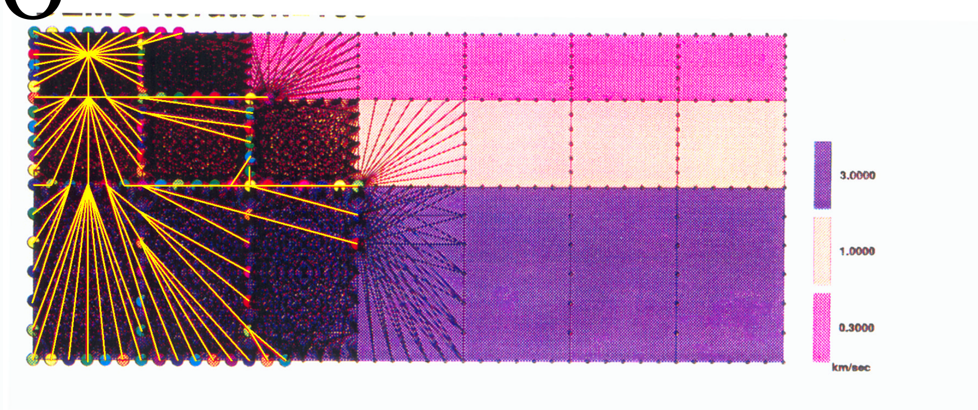


波線の計算例 (2)

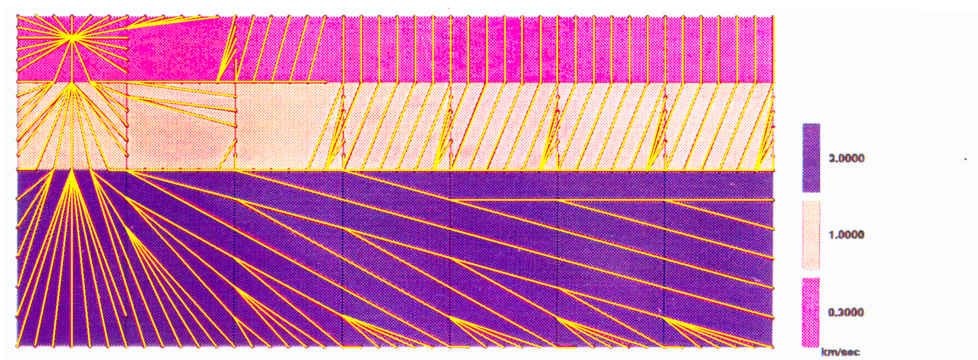
5


1.00000
0.30000
km/sec

6


3.0000
1.0000
0.3000
km/sec

7


3.0000
1.0000
0.3000
km/sec